

Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic.

EKVATIONER MED KOMPLEXA TAL

A) Ekvationer som innehåller både ett obekant komplext tal z och dess konjugat $\bar{z}$

B) Binomiska ekvationer.

A) Ekvationer som innehåller både z och $\bar{z}$

För att lösa en sådan ekvation $\bar{z}$ substituerar vi i ekvationen $z = x + yi$ och $\bar{z} = x - yi$.

Därefter förenklar vi ekvationen och grupperar realdelen/ imaginärdelen av varje sida.

Sedan bildar vi två ekvationer genom att identifiera realdelar på varje sida och imaginärdelar på varje sida av den förenklade ekvationen :

$$\operatorname{Re}(VL) = \operatorname{Re}(HL) \quad (\text{Ekv1})$$

$$\operatorname{Im}(VL) = \operatorname{Im}(HL) \quad (\text{Ekv2})$$

Slutligen löser vi systemet på x och y och svarar med $z = x + yi$.

Exempel 1.

$$\text{I ekvationen } 2z + i \cdot \bar{z} = 6$$

är z ett komplext tal och $\bar{z}$ talets konjugat. Lös ekvationen med avseende på z .

Lösning:

Vi substituerar $z = x + yi$ och $\bar{z} = x - yi$ i ekvationen och får

$$2(x + yi) + i \cdot (x - yi) = 6.$$

Vi förenklar (och grupperar realdelar/imaginärdelar på varje sida)

$$2x + y + (2y + x)i = 6 \quad (*)$$

Nu identifierar vi realdelar på båda sidor i (*),

$$2x + y = 6 \quad (\text{Ekv1})$$

och imaginära delar på båda sidor i (*)

$$2y + x = 0 \quad (\text{Ekv2})$$

Vi löser system av 2 ekvationer Ekv1 och Ekv2.

Från Ekv2 har vi $x = -2y$ som vi substituerar i Ekv1 och får

$$-4y + y = 6 \text{ eller } y = -2. \text{ Därför } x = 4.$$

Nu har vi $z = x + yi = 4 - 2i$

Svar: $z = 4 - 2i$

B) BINOMISKA EKVATIONER $z^n = a + bi$

Binomiska ekvationen med avseende på z

$$z^n = a + bi \quad (*)$$

har n lösningar. Enklast sätt att lösa ekvationen är att ange högerledet på potensform.

Steg 1. Vi bestämmer radien $r = |a + bi|$, ett argument $\arg(a + bi) = \theta + 2k\pi$

och skriver $a + bi = re^{(\theta + 2k\pi)i}$.

Anmärkning. Vi anger period för att få alla (n) lösningar till binomiska ekvationen (*)

Steg 2. Vi skriver ekvationen (*) på potensformen

$$z^n = r e^{(\theta+2k\pi)i} \quad (**)$$

Härav får vi följande n lösningar:

$$z_k = r^n e^{\frac{1}{n}(\theta+2k\pi)i} \quad \text{där } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1),$$

Vi får n lösningar genom att substituera $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

$$z_0 = r^n e^{\frac{1}{n}\theta i}, \quad z_1 = r^n e^{\frac{1}{n}(\theta+2\cdot 1\cdot \pi)i}, \quad z_2 = r^n e^{\frac{1}{n}(\theta+2\cdot 2\cdot \pi)i}, \\ z_3 = r^n e^{\frac{1}{n}(\theta+2\cdot 3\cdot \pi)i}, \quad \dots, \quad z_{n-1} = r^n e^{\frac{1}{n}(\theta+2\cdot (n-1)\cdot \pi)i}$$

Anmärkning: Om vi fortsätter och substituerar $k = n, n+1, \dots$ då upprepar vi redan bestämda lösningar. **Därför stannar vi vid $k = n-1$.**

Steg 3: Om detta krävs i uppgiften, skriver vi lösningar på rektangulär form.

Exempel 2. Lös ekvationen $z^3 = -2 + 2i$. Ange alla tre lösningar på rektangulär form med två decimaler.

Lösning:

Steg 1. Vi skriver högerledet dvs $-2 + 2i$ på potensform.

$$\text{Radien } r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \quad (\text{eller } r = 8^{1/2} = 2^{3/2})$$

Ett argument: $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ (vi adderar π eftersom $x < 0$, se formelblad).

$$\theta = \arctan \frac{2}{-2} + \pi = -\arctan(1) + \pi = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

Alltså $-2 + 2i = \sqrt{8} e^{\frac{3\pi}{4}i}$ och därmed blir ekvationen

$$z^3 = \sqrt{8} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

Steg 2. (Vi löser ekvationen)

Från ekvationen $z^3 = \sqrt{8} e^{\frac{3\pi}{4}i}$ har vi

$$z_k = \left(\sqrt{8} e^{\frac{3\pi}{4}i} \right)^{1/3} = (\sqrt{8})^{1/3} e^{\frac{3\pi+2k\pi}{3}i} = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi+8k\pi}{12}i}, \text{ där } k=0,1,2.$$

Alltså är $z_k = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi+8k\pi}{12}i}$ där $k=0,1,2$.

de sökta lösningarna på potensform (tre stycken).

Steg 3. Lösningar på rektangulär form.

Först polär form:

$$z_k = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi+8k\pi}{12}i} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right) \right) \text{ där } k=0,1,2$$

För att få rektangulärform substituerar vi $k = 0, 1$ och 2 och beräknar sinus och cosinus.

$k=0$ ger

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = 1 + i$$

$k=1$ ger

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi + 8 \cdot 1 \cdot \pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi + 8 \cdot 1 \cdot \pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right) \approx -1.366 + 0.366i$$

(Vi använder miniräknare i denna uppgift.)

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi + 8 \cdot 2 \cdot \pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi + 8 \cdot 2 \cdot \pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right) \approx 0.366 - 1.366i$$

Svar: $z_0 = 1 + i$

$$z_1 \approx -1.366 + 0.366i$$

$$z_2 \approx 0.366 - 1.366i$$

ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1.

Bestäm z ur ekvationen $2z + 3\bar{z} = 10 - 4i$.

Lösning:

Vi substituerar $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ i ekvationen $2z + 3\bar{z} = 10 - 4i$ och får

$$2(a + bi) + 3(a - bi) = 10 - 4i \quad (\text{förenkla})$$

$$5a - bi = 10 - 4i \quad (*)$$

Vi identifierar realdelar av båda leden av (*) och får

$$5a = 10 \quad (\text{Ekv1})$$

Vi identifierar imaginärdelar av båda leden av (*) och får

$$-b = -4 \quad (\text{Ekv2})$$

Från Ekv1 och Ekv 2 får vi $a = 2$ och $b = 4$.

Därmed $z = a + bi = 2 + 4i$

Svar: $z = 2 + 4i$

Uppgift 2.

I ekvationen $u + 3i \cdot \bar{u} = 8 + 2i$ är u ett komplex tal.
Lös ekvationen med avseende på u .

Lösning:

Substituera $u = x + yi$ och $\bar{u} = x - yi$ i ekvationen. Vi får

$$(x + yi) + 3i \cdot (x - yi) = 8 + 2i \Rightarrow$$

$$x + yi + 3xi + 3y = 8 + 2i \Rightarrow$$

$$(x + 3y) + (3x + y)i = 8 + 2i \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 8 \\ -9x - 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-8x = 2 \Rightarrow x = -1/4$$

$$y = 2 - 3x \Rightarrow y = 2 + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{11}{4}$$

$$x = -1/4, \quad y = 11/4 \Rightarrow$$

$$\text{Därmed } u = \frac{-1}{4} + \frac{11}{4}i.$$

$$\text{Svar: } u = \frac{-1}{4} + \frac{11}{4}i$$

Uppgift 3.

a) Skriv det komplexa talet $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$ på potensformen.

b) Lös ekvationen $z^3 = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$ och ange alla (tre) lösningar på potensform eller på polär form (välj själv).

Lösning:

$$\text{a) } r = |z| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8,$$

$$\arg(z) = \theta = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{rita grafen})$$

Därmed blir

$$-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2} = 8e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\text{b) Från } z^3 = 8e^{\frac{3\pi}{4}i} \text{ har vi } z = \sqrt[3]{64}e^{\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)i}, k = 0, 1, 2$$

dvs

$$z = 2e^{\left(\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right)i}, k = 0, 1, 2$$

Svar:

$$8a) 8e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$8b) z = 2e^{\frac{(3\pi/4+2k\pi)}{3}i}, k = 0,1,2 \quad \text{eller}$$

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0,1,2$$

Uppgift 4.

Bestäm alla (fyra) lösningar till ekvationen

$$z^4 + 16 = 0.$$

Svara exakt på rektangulär form.

Lösning:

$$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16$$

Notera att $r = |-16| = 16$ och att $\arg(-16) = \pi$.

Därmed är högerledet $-16 = 16e^{\pi i}$ (i potensform).

Ekvationen blir då

$$z^4 = 16e^{\pi i}.$$

Härav

$$z = 16^{\frac{1}{4}} e^{\frac{(\pi+2k\pi)}{4}i}, \quad k = 0,1,2,3$$

Vi anger alla lösningar på rektangulär form:

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi i}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2e^{\frac{3\pi i}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{\frac{5\pi i}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2e^{\frac{7\pi i}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Uppgift 5.

Betrakta ekvationen

$$z^4 + 81 = 0.$$

a) Lös ekvationen och ange alla lösningar (4 st) på potensform.

b) Ange alla lösningar på formen $a + bi$.

c) Pricka in lösningarna i det komplexa talplanet.

Lösning:

a)

$$z^4 + 81 = 0 \Rightarrow z^4 = -81 \Rightarrow$$

$$z^4 = 81e^{i\pi} \Rightarrow z_k = 3e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \quad k = 0,1,2,3$$

Svar a) $z_k = 3e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}}, \quad k = 0,1,2,3$

b)

$$z_0 = 3e^{\frac{i\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = 3e^{\frac{3i\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = 3e^{\frac{5i\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$z_3 = 3e^{\frac{7i\pi}{4}} = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Svar b) $\pm \frac{3}{\sqrt{2}} \pm i\frac{3}{\sqrt{2}}$

Svar c) Notera att alla lösningar har samma radie $r = 3$. Därmed ligger lösningarna på en cirkel med radien $r=3$. (Lösningarnas argument $\frac{\pi+2k\pi}{4}$ skiljer sig för $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.)

