

Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic.

KOMPLEXA TAL I POLÄR FORM och KOMPLEXA TAL I POTENSFORM

$$z = x + yi, \text{ där } x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{rektangulär form})$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{polär form})$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{De Moivres formel}$$

$$z = re^{\theta i} \quad (\text{potensform eller exponentialform})$$

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{Eulers formel} \quad (*)$$

Från Eulers formel har vi

$$e^{-\theta i} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \quad (**)$$

Från (*) och (**) får vi följande formler

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

Periodiska egenskaper:

$$e^{\theta i} = e^{(\theta + 2k\pi)i}$$

Beräkning av e^{a+bi} :

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Samband mellan olika former:

$$\begin{array}{ccccc} \text{rektangulär form} & & \text{polär form} & & \text{potensform} \\ x + yi & = & r(\cos \theta + i \sin \theta) & = & re^{\theta i} \end{array}$$

där

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

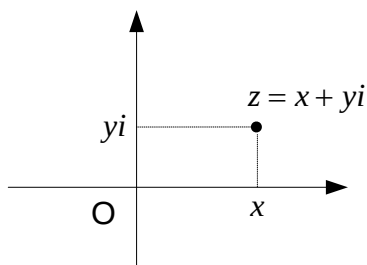
$$\cos \theta = \frac{x}{r},$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}.$$

=====

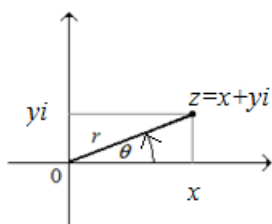
Det komplexa talplanet

Komplexa tal kan vi framställa som punkter i det komplexa talplanet som innehåller en reell och en imaginär axel.



Ett komplext tal kan vi ange på flera sätt. Om vi anger ett komplext tal som $z = x + yi$, där x och y är reella tal, säger vi att talet är given i **rektangulär form**. Exempelvis $z = 3+8i$. I många problem, som inkluderar komplexa tal, förenklar vi lösningsmetoden och beräkning genom att skriva komplexa tal i polär form eller i potensform.

POLÄR FORM OCH POTENSFORM



Låt (x, y) vara en punkt i xy -planet. Punktens position kan vi ange med s.k. **polära koordinater r och θ** .

Radien r är lika med avståndet från origo till punkten som representerar z .

θ är en (rotations-) vinkel mellan positiva delen av x -axeln och sträckan Oz .

Från ovanstående grafen har vi följande samband:

$$x = r \cos \theta \quad \text{och} \quad y = r \sin \theta.$$

Därmed kan vi skriva det komplexa talet $z = x + yi$ som

$$z = x + yi = r \cos \theta + ri \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Om vi skriver $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ då säger vi att vi har skrivit det komplexa z i **polär form**.

Enligt Eulers formel gäller $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, och därmed

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Om vi skriver $z = re^{i\theta}$ då säger vi att vi har skrivit det komplexa talet z i **potensform**.

Sammanfattning:

rektangulär form,

$$z = x + yi$$

polär form

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

potensform

$$= re^{i\theta}$$

Anmärkning: I några böcker kallas **polär form** för **trigonometrisk form**.

Bestämning av radien r och vinkeln θ för komplexa tal i polär form och potensform:

För att skriva ett komplext tal $z = x + yi$ på polär form $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ eller på potensform $z = re^{i\theta}$ måste vi först bestämma r och θ .

Från ovanstående grafen har vi (med Pytagoras sats)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Från rätvinkliga triangeln i figuren har vi (om $r = z \neq 0$)

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases} \quad (*)$$

En vinkel θ som uppfyller (*) kallas för **argument** av z och betecknas **arg(z)**.

Argument av z är **inte entydigt bestämd**.

Om θ_1 är ett argument av talet z då är också $\theta_1 + 2k\pi$, talets argument för varje $k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$

Bland oändligt många argument $\theta_1 + 2k\pi$ kallar vi det argument som ligger i intervallet $(-\pi, \pi]$ för **principalargument**.

Talet 0 tilldelas inget argument.

Låt $z = x + yi$. Ett värde av $\arg(z)$ kan bestämmas enligt följande:

$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{då } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

Om $x=0$ ligger $z = 0 + yi = yi$ på y-axeln och $\arg(z)$ kan bestämmas direkt från grafen (genom att pricka in z i det komplexa talplanet) eller enligt följande:

$$\arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{om } x = 0, \quad y > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{om } x = 0, \quad y < 0 \\ \text{ej definierad} & \text{om } x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

Anmärkning: Man kan modifiera ovanstående formler så att man direkt få det principalargumentet. (I vår kurs räcker det att välja ett argument, som inte behöver vara principalargumentet.)

Exempel 1. Skriv talet $z = -\sqrt{3} + i$ på a) polär form b) potensform

Lösning:

Radien: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

$\arg(z) = \theta = \{ \text{eftersom } x = -\sqrt{3} < 0 \} = \pi + \arctan \frac{y}{x}$

$$\pi + \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

a) Polär form: $z = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$

Notera(en gång til)l att vi kan välja som argument vilken som hels vinkel bland $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,

där k är ett heltal. Eftersom $\cos \frac{5\pi}{6} = \cos(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$ och $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$ får vi samma z , oavsett vilket argument vi väljer, dvs.

$$z = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 2[\cos(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi) + i \sin(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi)]$$

b) Potensform: $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

För att använda ovanstående formler för argumentet beräknar vi, i allmänt numeriskt, arctangens med hjälp av miniräknare eller ett matematiskt dataprogram. I några fall kan vi exakt beräkna arctangens.

Här är värdena av $\tan(v)$ om för ofta förekommande vinklar 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{3}$

v	0	$\frac{\pi}{6}$,	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(v)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ ($= \frac{1}{\sqrt{3}}$)	1	$\sqrt{3}$

Härav får vi följande tabell för beräkning av arctan:

c	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (= \frac{1}{\sqrt{3}})$	1	$\sqrt{3}$
arctan(c)	0	$\frac{\pi}{6},$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Notera att $\arctan(-c) = -\arctan(c)$. T ex $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$

RÄKNEOPERATIONER med komplexa tal i polär form.

Låt $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ och $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Följande gäller :

Multiplikation: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ (bevisas med additionsformlerna)

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$

Potenser i polärform beräknas på enkelt sätt med De Moivres formel:

Låt $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, då gäller

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Konjugat: $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$

Vi bevisar multiplikationsformeln:

Låt $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ och $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

Vi har

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) - (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

(enligt additionsformlerna)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Anmärkning: Om $z_1 = z_2$ och därmed $r_1 = r_2 = r$ samt $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ i ovanstående formel får vi $z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ dvs De Moivres formel för n=2.

(med hjälp av matematiska induktionen visar vi enkelt att formeln gäller för alla n.

=====

Exempel 2. Låt $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. Beräkna z^{13} .

Lösning: $z^{13} = \left(2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \right)^{13} = 2^{13}(\cos \frac{13\pi}{6} + i \sin \frac{13\pi}{6})$
 $= 2^{13}(\cos(2\pi + \frac{\pi}{6}) + i \sin(2\pi + \frac{\pi}{6})) = (\text{periodiska egenskaper}) = 2^{13}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$
 $= 2^{13}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

Från ovanstående räknelagar följer följande räknelagar för $\arg(z)$. Notera att talets argument inte är entydigt bestämt.

Räknelagar för $\arg(z)$

Om z och w är två komplexa tal då gäller:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \quad (+2k\pi)$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \quad (+2k\pi)$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \quad (+2k\pi)$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (+2k\pi)$$

RÄKNEOPERATIONER med komplexa tal i potensform.

Låt $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ och $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$. Multiplikation, division och beräkning av potenser gör vi enligt vanliga potenslagar:

Multiplikation: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2)i}$

Division $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$

Potenser i potensform:

Låt $z = r e^{\theta i}$, då gäller $z^n = (r e^{\theta i})^n = r^n e^{n\theta i}$

Periodiska egenskaper:

$$e^{\theta i} = e^{(\theta + 2k\pi)i}$$

Konjugat:

Om $z = re^{\theta i}$ så är $\bar{z} = re^{-\theta i}$

Exempel 3. Beräkna $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{26}$. Svara på rektangulär form (dvs $a+bi$ form)

Lösning: Först anger vi basen $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ på potensform:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1. \text{ Vinkeln } \theta = \arctan \frac{y}{x} + 180^\circ \text{ (notera } +180 \text{ eftersom } x < 0)$$

$$\theta = \arctan \sqrt{3} + 180^\circ = 240^\circ = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

Nu beräknar vi

$$z^n = r^n e^{n\theta i} = 1^{26} \cdot e^{26 \cdot \frac{4\pi}{3} i} = e^{\frac{104\pi}{3} i} =$$

Vi skriver resultatet på polärform och därefter på rektangulär form (genom att beräkna sinus och cosinus)

$$= \cos \frac{104\pi}{3} + i \sin \frac{104\pi}{3} = \cos\left(34\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(34\pi + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

(periodiska egenskaper: $\cos(2k\pi + v) = \cos(v)$ och $\sin(2k\pi + v) = \sin(v)$)

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

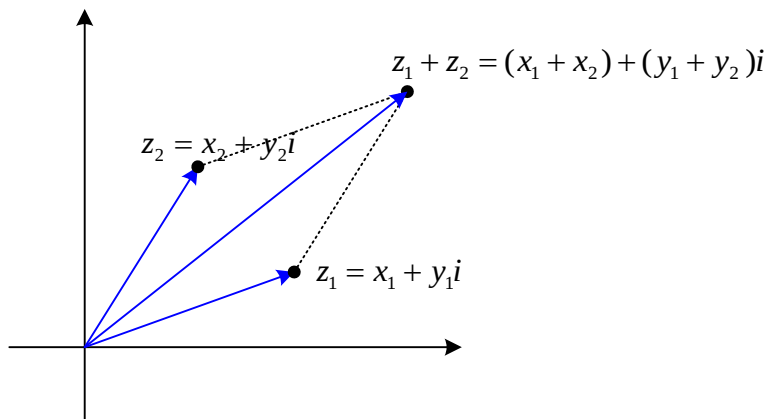
Svar: $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{26} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Geometrisk tolkning av operationer med komplexa tal.

Addition.

Låt $z_1 = x_1 + y_1i$ och $z_2 = x_2 + y_2i$ vara två komplexa tal.

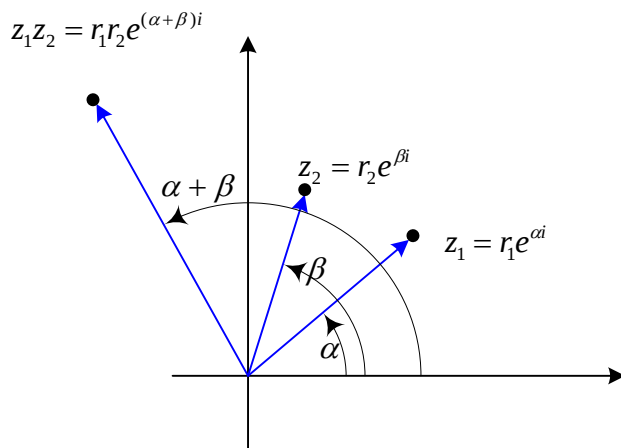
Då är $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Om vi tolkar komplexa tal som riktade sträckor (=vektorer) då får vi summan $z_1 + z_2$ enligt regeln för vektoraddition.



Geometrisk tolkning av multiplikation, division och potens .

Låt $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$ och $z_2 = r_2 e^{i\beta}$. Då gäller $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$.

Alltså gäller $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$ och $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \alpha + \beta$ som vi använder för att rita $z_1 z_2$ i det komplexa talplanet.



För divisionen $\frac{z_1}{z_2}$ gäller $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha-\beta)}$ dvs $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{r_1}{r_2}$ och

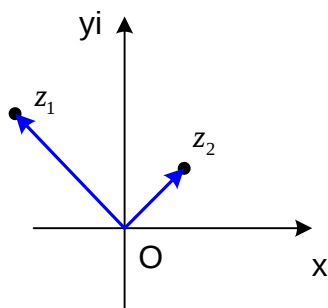
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \alpha - \beta$$

Om $z = r e^{i\alpha}$ då är $z^n = r^n e^{in\alpha}$ dvs $|z^n| = r^n$ och $\arg(z^n) = n \arg(z)$

Exempel 4. Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal i nedanstående figur. Anta vidare att $|z_2| = 1$.

Rita följande komplexa tal i det komplexa talplanet a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_1 \cdot i$ c) $\frac{z_1}{i}$ d) $\frac{z_1}{z_2}$ e) $\bar{z}_1$

e) $(z_2)^3$



Lösning a) Beteckna $w = z_1 z_2$. Vi bestämmer polära koordinater till w dvs $|w|$ och $\arg(w)$ och därefter ritar i det komplexa talplanet. Vi har

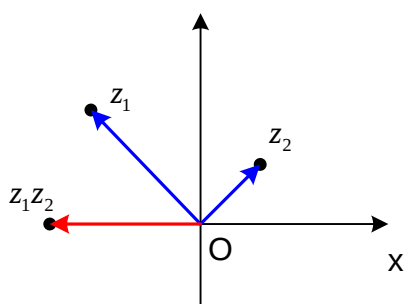
$$|w| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = |z_1| \cdot 1 = |z_1|$$

och, från grafen,

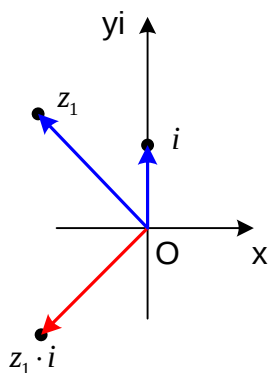
$$\arg(w) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Alltså är $|w|$ lika med $|z_1|$ och $\arg(w) \approx \pi$.

Därmed har vi följande graf:



Svar: b) Notera att $|i| = 1$ och att $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$



På liknande sätt löser man c), d) och e).

ÖVNINGSUPPGIFTER

För att skriva ett komplext tal $z = x + yi$ på polär eller potensform bestämmer vi först radien r och ett argument $\theta = \arg(z)$.

För **radien** har vi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Notera att man kan snabbt beräkna **enkla fall (om en koordinat är noll)**:

Om $z = a$ då är $r = |z| = |a|$.

Om $z = bi$ då är $r = |z| = |bi| = |b|$.

När det gäller **bestämning av ett argument** kan vi **pricka in z** i det komplexa talplanet. Vi får en av följande fall:

A) (Direkt bestämning av ett från grafen.)

A1. Om talet ligger på en av koordinataxlarna då har dvs. om x eller y är 0 då är enklast sätt att rita talet z i det komplexa talplanet och direkt bestämma vinkeln θ .

Exempelvis,

om $z = 5i$ så är $\theta = \frac{\pi}{2}$ (pricka in i xy-planet talet $z=5i$),

om $z = -2i$ så är $\theta = -\frac{\pi}{2}$,

om $z = 8$ så är $\theta = 0$,

om $z = -17$ så är $\theta = \pi$.

A2. Om $|x| = |y|$ dvs $x = \pm y$ då är $\tan \theta = \pm 1$. Därmed är ett argument av talet $z = x + yi$ en av följande fyra vinklar $\pm \frac{\pi}{4}$, $\pm \frac{3\pi}{4}$, som vi bestämmer direkt från grafen.

(Anmärkning. Fallet B2 kan vi självklart lösa med arcustangens, men det är snabbare att bestämma vinkeln direkt från grafen.)

Exempelvis,

om $z = 5+5i$ så är $\theta = \frac{\pi}{4}$ (pricka in i xy-planet talet $z=5+5i$),

om $z = -2+2i$ så är $\theta = \frac{3\pi}{4}$,

om $z = -8-8i$ så är $\theta = -\frac{3\pi}{4}$,

om $z = 20-20i$ så är $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

B) Om $x \neq 0$ och $y \neq 0$ kan vi använda funktionen arcustangens.

B1) Om $x > 0$ då är $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

B2) Om $x < 0$ då är $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$

eller, om man räknar i grader, $\theta = \arctan \frac{y}{x} + 180^\circ$

(Notera att vi kan välja vilket som helst vinkel bland $\theta + 2k\pi$ där k är ett heltal.)

Exempelvis,

om $z = 5\sqrt{3} - 5i$ så är (**eftersom $x > 0$**) $\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{-5}{5\sqrt{3}} = -\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$,

om $z = -10\sqrt{3} - 10i$ så är (**eftersom $x < 0$**)

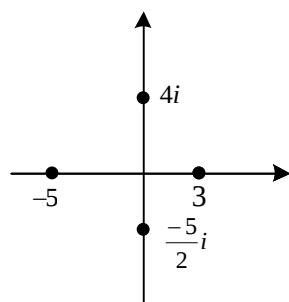
$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x} = \pi + \arctan \frac{-10}{-10\sqrt{3}} = \pi + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$$

Uppgift 1. Skriv följande tal i polär och potensform.

a) $z = 3$ b) $z = 4i$ c) $z = -5$ d) $z = -\frac{5}{2}i$.

Tips. Notera att de givna komplexa talen ligger på axlarna.

Lösning:



a) $r = |z| = |3| = 3$,
 $\theta = 0$ (se figuren).

Därmed $z = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3e^{0i}$.

b) $r = |z| = |4i| = 4$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ (se figuren).

Därmed $z = 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$.

c) $r = |z| = |-5| = 5$

$\theta = \pi$ (se figuren).

Därmed $z = 5(\cos \pi + i \sin \pi) = 5e^{i\pi}$.

d) $r = |z| = |-\frac{5}{2}i| = \frac{5}{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ (se figuren).

(Alternativ: Vi kan självklart välja $\theta = -\frac{\pi}{2}$ eller en annan vinkel $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$)

Därmed $z = \frac{5}{2}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = \frac{5}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Uppgift 2. Skriv följande tal i polär och potensform.

a) $z = 3 + 3i$ b) $z = -4 + 4i$ c) $z = -5 - 5i$ d) $z = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$.

Tips. Notera att $|x| = |y|$ dvs $x = \pm y$ så att vi kan bestämma argumentet direkt från grafen.

Lösning a) $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

Argumentet $\theta = \frac{\pi}{4}$ som vi kan direkt bestämma om vi prickar in talet $z = 3 + 3i$ i xy-planet.

Alternativ: Vi kan använda formeln (för $x > 0$):

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{3}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Svar:

a) $z = 3\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

b) $z = 4\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = 4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

c) $z = 5\sqrt{2}(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4}) = 5\sqrt{2}e^{\frac{-3\pi}{4}i}$

d) $z = \frac{5}{2}\sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4}) = \frac{5}{2}\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$

Uppgift 3. Skriv följande tal i polär och potensform.

a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ b) $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ c) $z = -\sqrt{3} + i$

Tips. Använd formeln $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ om $x > 0$

och $\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}$ om $x < 0$.

Lösning:

a) Radien: $r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$

Ett argument: **Eftersom $x > 0$** kan vi välja $\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

(Anmärkning: Vi kan välja vilken som helst vinkel bland $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, där k är ett heltal.)

Därför $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

b) Radien: $r = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8}$

Ett argument: **Eftersom $x < 0$** kan vi välja

$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x} = \pi + \arctan \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \pi + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

(Anmärkning: Vi kan välja vilken som helst vinkel bland $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, k ett heltal t. ex. för $k=-1$ får vi det principala argumentet $-\frac{5\pi}{6}$.)

$$z = \sqrt{8}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = \sqrt{8}e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

c) Radien: $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

Ett argument: **Eftersom $x < 0$** kan vi välja

$$\theta = \pi + \arctan \frac{y}{x} = \pi + \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Svar:

a) $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

b) $z = \sqrt{8}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = \sqrt{8}e^{\frac{7\pi}{6}i}$

c) $z = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$

Uppgift 4. Skriv talet på rektangulär form om

a) $z = 3e^{\frac{5i\pi}{4}}$ b) $z = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$

Lösning:

a) $z = 3e^{\frac{5i\pi}{4}} = 3(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) = \frac{-3}{\sqrt{2}} - i \frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $z = 2e^{\frac{2\pi i}{3}} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$

Svar: a) $\frac{-3}{\sqrt{2}} - i \frac{3}{\sqrt{2}}$ b) $-1 + i\sqrt{3}$

Uppgift 5. Beräkna $(1+i)^{82}$.

Tips: Skriv basen (dvs $1+i$) i potensform.

Lösning:

Först skriver vi basen $(1+i)$ i potensform.

Radien är $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ett argument: Eftersom $x > 0$ har vi $\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

Därför är basen $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Nu beräknar vi enkelt (med hjälp av potenslagar)

$$(1+i)^{82} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \right)^{82} = (\sqrt{2})^{82} e^{82 \cdot \frac{\pi i}{4}} = 2^{41} e^{\frac{41\pi i}{2}} \quad (\text{skriv i polär form})$$

$$= 2^{41} \left[\cos\left(\frac{41\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{41\pi}{2}\right) \right]$$

(Notera att $\frac{41\pi}{2} = 20\pi + \frac{1\pi}{2}$ och använd periodiska egenskaper för trig. funktionerna)

$$= 2^{41} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 2^{41} (0 + 1i) = 2^{41}i.$$

Svar: $2^{41}i$

Uppgift 6.

Beräkna $w = \frac{(e^{\frac{\pi i}{3}})^6 (1+i)^{16}}{i^9}$ och skriv resultatet på potensform och på rektangulärform (dvs. på $(a+bi)$ form)

Lösning:

Först förenklar vi varje faktor i täljaren och nämnaren.

$$1) \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^6 = e^{2\pi i} = e^{0i} = 1 \quad (\text{Alternativt } e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + 0 = 1)$$

2)

Först skriver vi basen $(1+i)$ på potensform.

$$\text{Radien är } r = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Genom att rita en figur får vi } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Alltså är } 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

$$\text{Därför } (1+i)^{16} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{16} = 2^8 e^{4\pi i} = 2^8 \cdot e^{0i} = 2^8.$$

$$3) i^9 = i^8 \cdot i = 1i = i.$$

Nu beräknar vi hela uttrycket:

$$w = \frac{\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^6 (1+i)^{16}}{i^9} = \frac{1 \cdot 2^8}{i} = 2^8 \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = 2^8 \cdot \frac{i}{-1} = -2^8 \cdot i$$

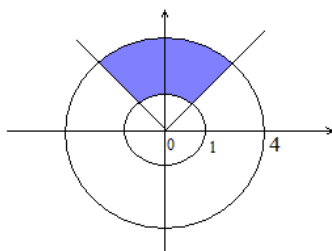
$$\text{Svar: } -2^8 \cdot i$$

Uppgift 7.

Skissera (rita) i det komplexa talplanet området som består av alla z som satisfierar

$$\text{både } 1 \leq |z| \leq 4 \quad \text{och} \quad \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}.$$

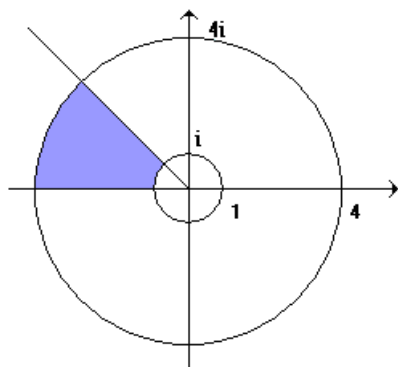
Svar:

**Uppgift 8.**

Rita i det komplexa talplanet de punkter z som satisfierar både

$$1 \leq |z| \leq 4 \quad \text{och} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \pi.$$

Svar:



Uppgift 9.

Bestäm $|z|$ och $\arg(z)$ (som en reell funktion av parameter s) då

a) $z = \frac{5}{2 + (s+3)i}$, b) $z = \frac{5+5i}{4 + (s+1)i}$ c) $z = \frac{-3+si}{4+4i}$

där s är ett reellt tal.

Lösning:

a) $z = \frac{5}{2 + (s+3)i} \Rightarrow |z| = \frac{|5|}{|2 + (s+3)i|} = \frac{5}{\sqrt{4 + (s+3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{s^2 + 6s + 13}}$
 $\arg(z) = \arg(5) - \arg(2 + (s+3)i) = [\text{eftersom } x = \operatorname{Re}(2 + (s+3)i) = 2 > 0]$
 $= (0 - \arctan(\frac{s+3}{2})) = -\arctan(\frac{s+3}{2}).$

b) $|z| = \frac{|5+5i|}{|4 + (s+1)i|} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{16 + (s+1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{s^2 + 2s + 17}}$
 $\arg(z) = \arg(5+5i) - \arg(4 + (s+1)i) = \frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{s+1}{4}).$

c) $|z| = \frac{\sqrt{9+s^2}}{4\sqrt{2}}$
 $\arg(z) = \arg(-3+si) - \arg(4+4i) = [\text{eftersom } x = \operatorname{Re}(-3+si) = -3 < 0]$
 $= [\pi + \arctan(\frac{s}{-3})] - \arctan(\frac{4}{4}) = \pi - \arctan(\frac{s}{3}) - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \arctan(\frac{s}{3}).$

Svar: a) $|z| = \frac{5}{\sqrt{s^2 + 6s + 13}}$, $\arg(z) = -\arctan(\frac{3+s}{2})$
b) $|z| = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{s^2 + 2s + 17}}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4} - \arctan(\frac{s+1}{4}).$
c) $|z| = \frac{\sqrt{9+s^2}}{4\sqrt{2}}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4} - \arctan(\frac{s}{3}).$