

Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic.

KOMPLEXA TAL

Inledning

Ekvationen $x^2 = 1$ har två reella lösningar, $x = \pm\sqrt{1}$, dvs $x = \pm 1$, medan ekvationen $x^2 = -1$ saknar reella lösningar. Om vi försöker formellt lösa ekvationen $x^2 = -1$ skriver vi $x = \pm\sqrt{-1}$. Igen samma problem: roten $\sqrt{-1}$ är inte definierat som ett reellt tal. Historiskt utvidgade man mängden av reella tal genom att formellt beteckna $\sqrt{-1} = i$. För "talet" i som kallas för **imaginär enhet** gäller alltså

$$i^2 = -1.$$

(Anmärkning: I modern komplex analys betraktar man att $\sqrt{-1}$ har två värden $\pm i$ där $+i$ kallas principalvärdet av $\sqrt{-1}$.)

Exempel 1. Lös ekvationerna

a) $x^2 = -4$ b) $x^2 = -3$ c) $(x+3)^2 = -3$ d) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Lösning:

a) ekvationen $x^2 = -4$ två lösningar

$$x = \pm\sqrt{-4} \text{ eller } x = \pm 2i.$$

b) Ekvationen $x^2 = -3$ har två lösningar $x = \pm\sqrt{-3}$ eller $x = \pm i\sqrt{3}$.

c) Ekvationen $(x+3)^2 = -3$ löser vi på liknande sätt

$$x+3 = \pm\sqrt{-3} \Leftrightarrow x+3 = \pm i\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -3 \pm i\sqrt{3}.$$

d) Ekvationen $x^2 + 2x + 2 = 0$ löser vi med pq -formeln.

$$\text{Vi har } x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

Ett tal som kan skrivas på formen $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbb{R}$ kallas ett **komplext tal**.

Till exempel är $z = 5 - 12i$ ett komplext tal.

Mängden av alla komplexa tal betecknas $\mathbb{C}$ dvs

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Speciella fall:

i) Om $b=0$ får vi $z = a$. I detta fall är z ett reellt tal. t ex $z = -8$.

ii) Om $a=0$ får vi $z = bi$. I detta fall är z ett rent imaginär tal.

POTENSER AV i

Potenser av i kan beräknas enligt följande:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

För att beräkna högre potenser i^n där $n > 4$, använder vi resultatet $i^4 = 1$.

Vi skriver n på formen $n = 4k + r$ (där r är resten om n delas med 4, r kan vara 0, 1, 2 eller

Då gäller

$$i^n = i^{4n+r} = i^{4n} \cdot i^r = i^r \quad (\text{eftersom } i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1)$$

Exempel 2. Beräkna a) i^{38} b) i^{443}

Lösning: a) $i^{38} = i^{36} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$ (eftersom $i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1$)

b) $i^{443} = i^{440} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$

Definition:

Om $z = a + bi$ och $a, b \in \mathbb{R}$ då gäller:

a kallas **realdelen** av z och betecknas $\operatorname{Re}(z)$

b kallas **imaginärdelen** av z och betecknas $\operatorname{Im}(z)$

$a - bi$ kallas **konjugatet** till z och betecknas $\bar{z}$

$\sqrt{a^2 + b^2}$ kallas **absolutbeloppet** av z och betecknas $|z|$

Följande relationer används vid olika beräkningar:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Med andra ord: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, dvs

produkten av ett komplext tal och dess konjugat är alltid ett reellt tal ≥ 0 .

Exempel 3. Låt $z = -5 - 3i$. Bestäm $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$, $|z|$ och $z \cdot \bar{z}$

Lösning: $\operatorname{Re}(z) = -5$, $\operatorname{Im}(z) = -3$, $\bar{z} = -5 + 3i$,

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34},$$

$$z \cdot \bar{z} = (-5 - 3i)(-5 + 3i) = 25 - 9i^2 = 25 + 9 = 34.$$

RÄKNEOPERATIONER med komplexa tal i rektangulär form (dvs. $a+bi$ form).

Addition, multiplikation och division av komplexa tal (på rektangulär form).

Addition: Låt $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$. Då gäller

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Anmärkning: Man kan strängt definiera mängden av alla komplexa tal som mängden av **talpar** (a, b) där a och b är reella tal,

med följande räkne operationer:

addition: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ och

multiplikation: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Paret $(0, 1)$ representerar den imaginära enheten i .

Division: Låt $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$.

$$\begin{aligned} \text{Då gäller } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 + d^2} \quad (\text{notera att } i^2 = -1) \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

Exempel 4. Låt $z_1 = -2 - 3i$ och $z_2 = -1 + 2i$. Beräkna a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 \cdot z_2$ och c) $\frac{z_1}{z_2}$

Lösning: a) $z_1 + z_2 = (-2 - 3i) + (-1 + 2i) = -3 - i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (-2 - 3i)(-1 + 2i) = 2 + 3i - 4i - 6i^2 = 2 + 3i - 4i + 6 = 8 - i$

c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 - 3i}{-1 + 2i} = \frac{-2 - 3i}{-1 + 2i} \cdot \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} = \frac{2 + 3i + 4i + 6i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

Räknelagar för komplexkonjugering

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{(z \cdot w)} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

Räknelagar för absolutbelopp

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \quad (\text{triangelolikheten}).$$

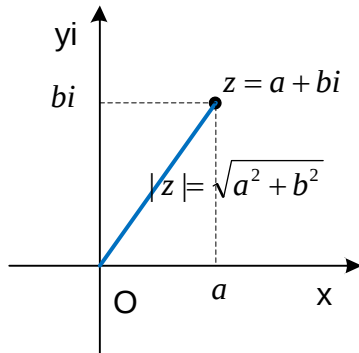
Exempel 5. Låt $z = \frac{(-2 + i)(1 + i)^4}{-1 + 2i}$. Beräkna $|z|$.

Lösning: Vi kan först beräkna z och sedan bestämma $|z|$ men det är mycket enklare att använda räknelagar för absolutbelopp. Enligt ovanstående **räknelagar** har vi

$$|z| = \left| \frac{(-2 + i)(1 + i)^4}{-1 + 2i} \right| = \frac{|-2 + i| \cdot |1 + i|^4}{|-1 + 2i|} = \frac{\sqrt{4 + 1} \cdot (\sqrt{1 + 1})^4}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2})^4}{\sqrt{5}} = 4.$$

DET KOMPLEXA TALPLANET

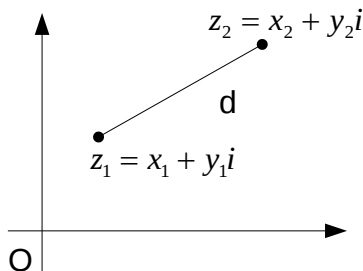
Komplexa tal kan vi framställa som punkter i det komplexa talplanet som innehåller en reell och en imaginär axel.



Absolutbeloppet $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ är lika med avståndet, i det komplexa talplanet, från punkten $z = a + bi$ till origo.

=====

Avståndet mellan två punkter i det komplexa talplanet.



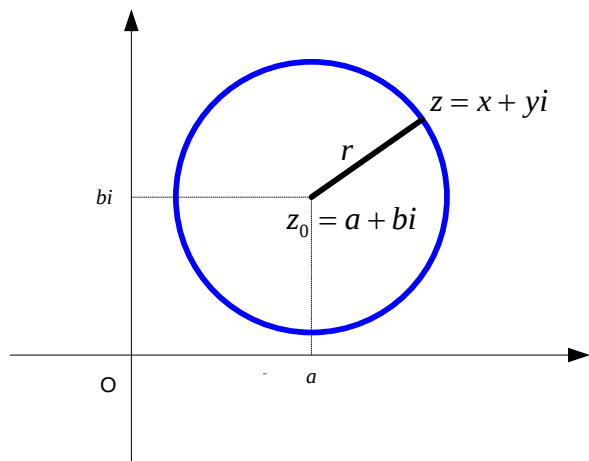
Låt P_1 och P_2 vara två punkter i det komplexa talplanet som representeras av komplexa talen $z_1 = x_1 + y_1i$ och $z_2 = x_2 + y_2i$. För avståndet mellan punkterna gäller

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|$$

=====

Cirkelns ekvation i det komplexa talplanet: Cirkeln med radien r och centrum i punkten $z_0 = a + bi$ har ekvationen (på komplex form)

$$|z - z_0| = r \quad \text{dvs} \quad |z - (a + bi)| = r \quad \text{eller} \quad |z - a - bi| = r.$$



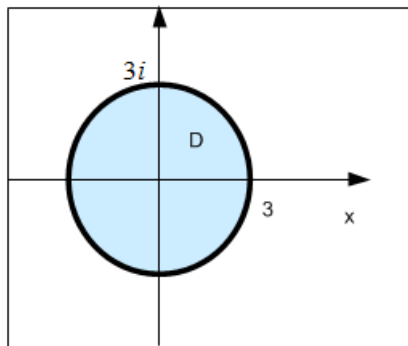
Om cirkelns centrum ligger i origo O (svarar mot $0+0i=0$) då är cirkelns ekvation väldigt enkel: $|z-0|=r$ dvs $|z|=r$.

Exempel 6. Rita det komplexa talplanet mängden av alla punkter z som bestäms av

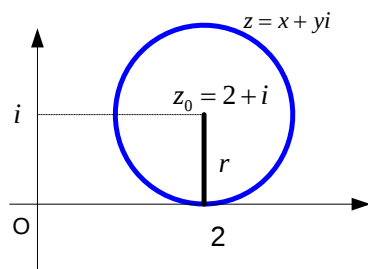
- a) $|z| \leq 3$ b) $|z-2-i|=1$, c) $|z-2-i| \leq 1$ d) $|z-2-i| \geq 1$

Lösning:

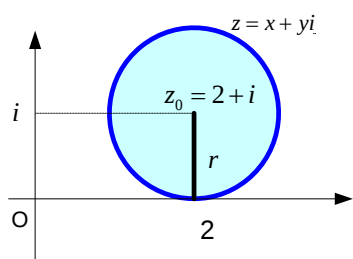
a) Relationen $|z| \leq 3$ satisfieras av de punkter som ligger inuti och på cirkeln med centrum i punkten 0 och radien 3 . (Detta är en **sluten cirkelskiva**.)



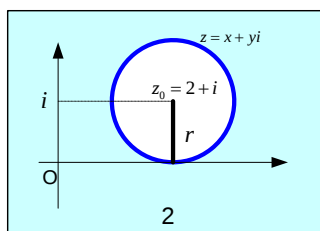
b) Från $|z-2-i|=1$ (genom att bryta ut -1) har vi $|z-(2+i)|=1$. Detta är ekvationen för cirkeln med centrum i punkten $2+i$ och radien 1 .



c) $|z - 2 - i| \leq 1$ satisfieras av de punkter som ligger inuti och på själva cirkelns linje med centrum i punkten $2 + i$ och radien 1. (Detta är en sluten cirkelskiva.)



c) $|z - 2 - i| \geq 1$ satisfieras av de punkter som ligger utanför och på själva cirkelns linje

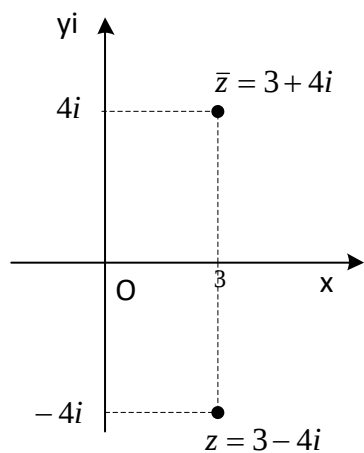


=====

ÖVNINGSUPPGIFTER

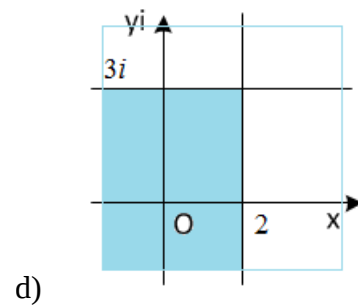
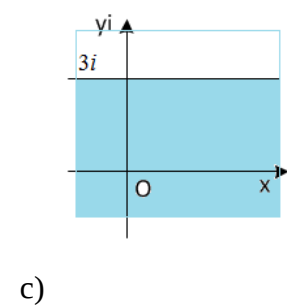
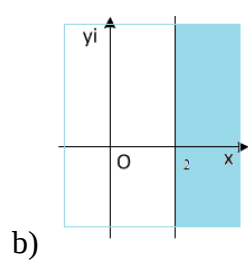
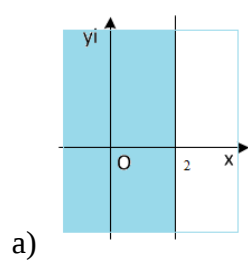
Uppgift 1. Låt $z = 3 - 4i$. Bestäm $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$ och $|z|$. Rita z och $\bar{z}$ i det komplexa talplanet.

Svar: $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = -4$, $\bar{z} = 3 + 4i$, $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$



Uppgift 2. Rita i det komplexa tal planet mängden av alla komplexa tal z som satisfierar
 a) $\operatorname{Re} z \leq 2$ b) $\operatorname{Re} z \geq 2$ c) $\operatorname{Im} z \leq 3$ d) både $\operatorname{Re} z \leq 2$ och $\operatorname{Im} z \leq 3$

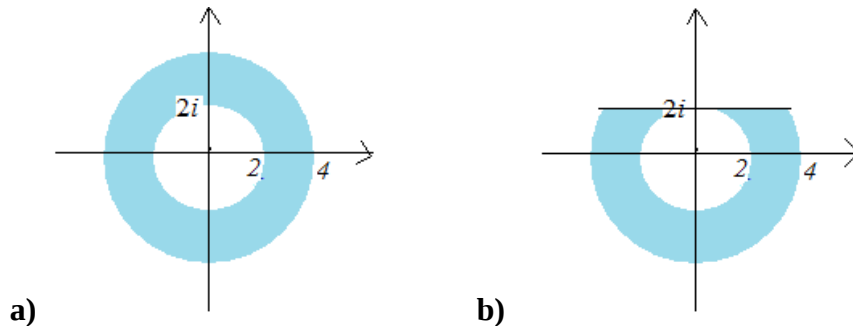
Svar: Den färgade delen i figuren representerar den sökta mängden.



Uppgift 3. Rita i det komplexa tal planet mängden av alla komplexa tal z som satisfierar

a) $2 \leq |z| \leq 4$. b) både $2 \leq |z| \leq 4$ och $\text{Im}(z) \leq 2$

Svar: Den färgade delen i figurerna representerar den sökta mängden.



Uppgift 4.

a) Bestäm $\text{Re}(w)$ om $w = \frac{1+i}{1-i} + i^{4000}$.

b) Rita i det komplexa tal planet mängden av alla komplexa tal z som satisfierar

$$1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 4$$

($\bar{z}$ betecknar z - konjugat)

Lösning:

a)

$$w = \frac{1+i}{1-i} + i^{4000} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + 1 = \frac{1+2i-1}{1-i^2} + 1 = \frac{2i}{1-(-1)} + 1 = \frac{2i}{2} + 1 = i + 1 = 1 + i.$$

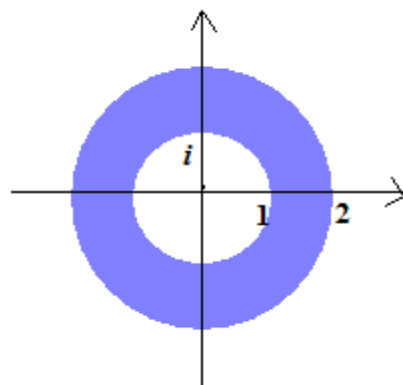
$$\text{Re}(w) = 1$$

Svar a) $\text{Re}(w) = 1$

b) Eftersom $z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$ skriver vi $1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 4$ som

$1 \leq |z|^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 2$. Sista relationen är uppfylld om punkten z ligger mellan (och på) två cirklar $|z| = 1$ och $|z| = 2$.

Svar b)



Uppgift 5.

a) Bestäm $|w|$ om $w = \frac{4+3i}{4-3i}$.

b) Ekvationen

$$|z-i| = |z-1|$$

beskriver en rät linje i det komplexa tal planet.

Sätt $z = x + iy$ och skriv ekvationen på formen $y = kx + m$.

Lösning:

a)

$$|w| = \frac{|4+3i|}{|4-3i|} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{25}} = 1$$

$$b) |z-i| = |z-1| \Rightarrow |x+iy-i| = |x+iy-1| \Rightarrow |x+i(y-1)| = |x-1+iy|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad (\text{Vi kvadrerar båda leden i ekvationen})$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow$$

$$-2y = -2x \Rightarrow$$

$$y = x.$$

Svar: a) $|w|=1$ b) $y = x$

Uppgift 6. Bestäm det reella talet a så att $\frac{1+ai}{2-5i}$ blir reellt.

Lösning:

$$\frac{1+ai}{2-5i} = \frac{1+ai}{2-5i} \cdot \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{(2-5a) + (2a+5)i}{29}.$$

Om detta tal skall vara reellt måste imaginärdelen vara 0, vilket ger $2a+5=0$ d v s
 $a = -5/2$.

Svar: $a = -2.5$

Uppgift 7.

a) Bestäm imaginärdelen av $z = \frac{1-i}{(1+i)^2} + 4i^{89}$.

b) Bestäm absolutbeloppet av w då $w = \frac{(2+2i)^2}{i^{10}}$.

Lösning:

$$\text{a) } z = \frac{1-i}{(1+i)^2} + 4i^{89} = \frac{1-i}{1+2i-1} + 4i = \frac{(1-i)i}{2i \cdot i} + 4i = \frac{i+1}{-2} + 4i = \frac{-1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

$$\text{Svar a) } \operatorname{Im}(z) = \frac{7}{2}$$

$$\text{b) } |w| = \left| \frac{(2+2i)^2}{i^{10}} \right| = \frac{|2+2i|^2}{|i|^{10}} = \frac{(\sqrt{8})^2}{|1|^{10}} = 8.$$

$$\text{Svar b) } |w| = 8$$

Uppgift 8.

a) Bestäm imaginärdelen av $z = \frac{1-2i}{1+2i} + 3i^{37}$.

b) Ekvationen

$$|z-1-i| = |z-3-3i|$$

beskriver en rät linje i det komplexa talplanet. Sätt $z = x + iy$ och skriv ekvationen på formen $y = kx + m$.

Lösning:

$$\text{a) } z = \frac{-3}{5} + \frac{11}{5}i \quad (\text{beräkna själv}) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{5}$$

$$\text{Svar a) } \operatorname{Im}(z) = \frac{11}{5}$$

b) Substitutionen $z = x + iy$ i ekvationen $|z-1-i| = |z-3-3i|$ ger

$$|x+iy-1-i| = |x+iy-3-3i| \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow (\text{efter kvadrering})$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow$$

$$4y = -4x + 16 \Rightarrow$$

$$y = -x + 4.$$

$$\text{Svar b) } y = -x + 4$$

Uppgift 9.

Bestäm $|z_3|$ då $z_3 = \frac{5}{2 + (s+3)i}$, där s är ett reellt tal.

Lösning:

$$z_3 = \frac{5}{2 + (s+3)i} \Rightarrow |z_3| = \frac{|5|}{|2 + (s+3)i|} = \frac{5}{\sqrt{4 + (s+3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{s^2 + 6s + 13}}$$

Svar: $\frac{5}{\sqrt{s^2 + 6s + 13}}$

Uppgift 10.

a) Bestäm $|w|$ om $w = \frac{2+i}{1-2i}$.

b) Skissera i det komplexa talplanet området som består av alla z som satisfierar $1 \leq |z - (4 + 4i)| \leq 3$.

Lösning:

a) $|w| = \frac{|2+i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+4}} = 1$.

Svar a: $|w|=1$

Svar b:

