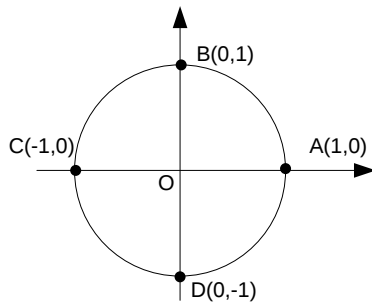


Följande material är gjort av tidigare lärare på kursen, Armin Halilovic, och har sedan blivit redigerat:

DEN TRIGONOMETRISKA ENHETSCIRKELN OCH TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER

Den trigonometriska enhetscirkeln är en cirkel med radie =1 och mittpunkt i origo.

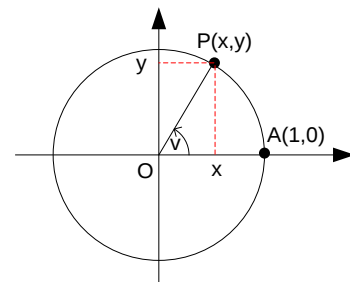


I en rätvinklig triangel definierar vi trigonometriska funktioner för spetsiga vinklar medan med hjälp av den trigonometriska enhetscirkeln definierar vi trigonometriska funktioner sinus, cosinus, tangens och cotangens för godtyckligt stora vinklar.

Låt $P(x,y)$ vara den punkt som vi får genom att rotera punkten $A(1,0)$ vinkeln v kring origo.

(**Moturs-rotation** om vinkeln är positiv, medurs-rotation om vinkeln är negativ.)

Funktionerna $\cos(v)$ och $\sin(v)$ definieras som x- respektive y-koordinaten av punkten P.



Med andra ord gäller

$$\cos(v) = x$$

$$\sin(v) = y$$

Tangens definieras genom

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \quad \text{om nämnaren } \cos(v) \neq 0$$

Udda och jämna trigonometriska funktioner

Allmänt säger man att en funktion $f(x)$ är

jämn om $f(-x) = f(x)$ och

udda om $f(-x) = -f(x)$.

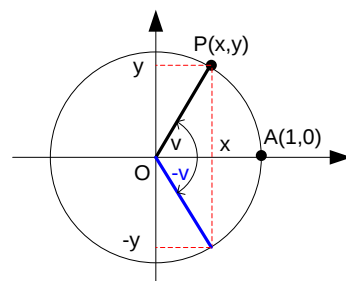
Från trigonometriska cirkeln har vi

$$\sin(-v) = -\sin(v) \text{ och } \cos(-v) = \cos(v).$$

$$\text{Därför } \tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v).$$

På liknande sätt $\cot(-v) = -\cot(v)$.

Alltså är **cosinus** är en **jämn** funktion medan **Sinus och tangens** är **udda** funktioner:



$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos(v) \\ \sin(-v) &= -\sin(v) \\ \tan(-v) &= -\tan(v) \end{aligned}$$

Uppgift 1.

Bestäm a) $\cos(90^\circ)$ b) $\sin(90^\circ)$ c) $\tan(90^\circ)$

Lösning. Om punkten A(1,0) roteras 90° hamnar den i B(0,1). Därför blir

$\cos(90^\circ) = x$ -koordinaten av B(0,1) dvs $\cos(90^\circ) = 0$.

$\sin(90^\circ) = y$ -koordinaten av B(0,1) dvs $\sin(90^\circ) = 1$

$\tan(90^\circ) = \frac{\sin(90^\circ)}{\cos(90^\circ)} = \frac{1}{0}$ ej definierad

Svar: a) $\cos(90^\circ) = 0$, b) $\sin(90^\circ) = 1$ c) $\tan(90^\circ)$ är inte definierad

Uppgift 2.

Bestäm a) $\cos(5\pi)$, b) $\sin(-\frac{\pi}{2})$ c) $\tan(5\pi)$ e) $\cos(545\pi)$ f) $\tan(-\frac{\pi}{2})$

Anmärkning: 2π radianer = 360° , π radianer = 180° , $\frac{\pi}{2}$ radianer = 90° .

Svar: a) -1 , b) -1 c) 0 e) $\cos(545\pi) = \cos(\pi) = -1$ f) ej definierad

Uppgift 3.

Bestäm a) $\cos(-\frac{\pi}{4})$ b) $\sin(-\frac{\pi}{6})$ c) $\tan(-\frac{\pi}{3})$ e) $\cos(-\frac{\pi}{3})$ f) $\sin(-\frac{\pi}{4})$ g) $\tan(-\frac{\pi}{6})$

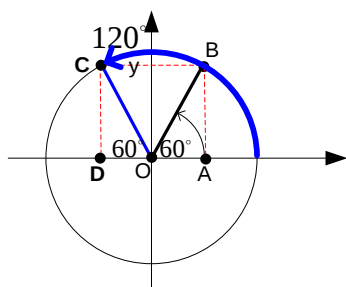
Svar: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Reduktion till trigonometriska funktioner av spetsiga vinklar

Exempel: Bestäm exakt $\cos(120^\circ)$.

Lösning:

a) Vi jämför $\cos(120^\circ)$ med $\cos(60^\circ)$ (skillnaden från 120° till 180°)



Från ovanstående figur ser vi att $\cos(120^\circ)$ och $\cos(60^\circ)$ har samma absolutbelopp (eftersom $|OD| = |OA|$) men olika tecken.

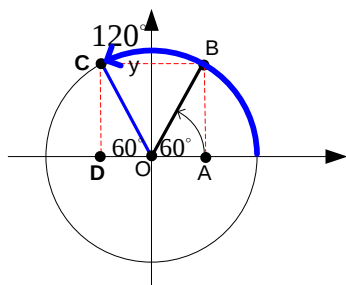
Därför $\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Svar: $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Uppgift 4.

Bestäm a) $\sin(120^\circ)$, b) $\cos(150^\circ)$ c) $\tan(240^\circ)$

Lösning:



Lösning:

a) Reduktion till $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Alltså $\sin(120^\circ) = +\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Reduktion till $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Alltså $\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Reduktion till $240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$. Alltså $\tan(240^\circ) = +\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

Svar: a) $\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan(240^\circ) = \sqrt{3}$

Uppgift 5.

Bestäm a) $\sin(\frac{7\pi}{6})$, b) $\tan(\frac{7\pi}{4})$

Lösning: a) $\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ b) $\tan(\frac{7\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$

Svar: a) $\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ b) $\tan(\frac{7\pi}{4}) = -1$

TRIGONOMETRISKA EKVATIONER

A) Ekvationen $\sin(x) = a$ (och liknande ekvationer).

Ekvationen $\sin(x) = a$ har lösningar endast om $-1 \leq a \leq 1$ (eftersom $-1 \leq \sin(x) \leq 1$).

Exempelvis, ekvationen $\sin(x) = 3$ saknar lösningar.

Uppgift 6. Lös följande ekvationer

a) $\sin(x) = 4$ b) $\sin(x) = -5$

Svar: a) Ingen lösning eftersom $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

b) Ingen lösning eftersom $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Uppgift 7. Lös följande ekvationer

a) $\sin(x) = 1$ b) $\sin(x) = -1$ c) $\sin(x) = 0$

Tips. Rita den trigonometriska cirkeln

Svar:

a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ c) $x = k\pi$ (där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Om v_1 är en lösning till ekvationen $\sin(x) = a$, där $-1 < a < 1$, så är $v_2 = \pi - v_1$ också en lösning: Alla lösningar, i detta fall, ges av

$x = v_1 + 2k\pi$ eller $x = \pi - v_1 + 2k\pi$, där k är ett heltal (dvs. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Vi använder oftast värdena av sinusfunktionen för vinklar $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{3}$:

vinkeln	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
v	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin(v)	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Notera att

1) $\sin(-x) = -\sin(x)$ (dvs $\sin(x)$ är en **udda** funktion)

2) $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (dvs sinusfunktionen är en **periodisk** funktion med **grundperioden** 2π)

ANMÄRKNING: I nedanstående lösningar betecknar k ett heltal (dvs. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Uppgift 8. Lös följande ekvationer

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

c) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar:

a) Ekvationen har följande lösningar:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Vi kan också ange svaret i grader:

$x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ eller $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$.

b) $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $x = (\pi - (-\frac{\pi}{6})) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

d) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

e) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ eller $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

f) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ eller $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Uppgift 9. Lös ekvationen $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Tips. Beteckna $2x + \frac{\pi}{3} = v$ och lös först ekvationen $\sin v = \frac{1}{2}$.

Lösning:

Låt $v = 2x + \frac{\pi}{3}$. Först löser vi ekvationen $\sin v = \frac{1}{2}$.

Vi får

$$v = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ och } v = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

och därmed

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ eller } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Härav

$$\text{i) } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (\text{dela med 2})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi.$$

På liknande sätt

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (\text{dela med 2})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Svar: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

=====

B) Ekvationen $\cos(x) = a$ (och liknande ekvationer).

Ekvationen $\cos(x) = a$ har lösningar endast om $-1 \leq a \leq 1$ (eftersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$).

Exempelvis, ekvationen $\cos(x) = 5$ saknar lösningar.

Uppgift 10. Lös följande ekvationer

a) $\cos(x) = 24$ b) $\cos(x) = -15$

Svar: a) Ingen lösning eftersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

b) Ingen lösning eftersom $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Uppgift 11. Lös följande ekvationer

a) $\cos(x) = 1$ b) $\cos(x) = -1$ c) $\cos(x) = 0$

Tips. Rita den trigonometriska cirkeln

Svar:

a) $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi$ b) $x = \pi + 2k\pi$ c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Om v_1 är en lösning till ekvationen $\cos(x) = a$, där $-1 < a < 1$, så är $v_2 = -v_1$ också en lösning: Alla lösningar, i detta fall, ges av

$x = v_1 + 2k\pi$ och $x = -v_1 + 2k\pi$, där k är ett heltal (dvs. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

För att lösa exakt några ekvationer som innehåller cosinusfunktionen kan vi använda värdena i nedanstående tabell.

vinkeln v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos(v)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Notera att

1) $\cos(-x) = \cos(x)$ (dvs $\cos(x)$ är en **jämn** funktion)

2) $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (dvs cosinusfunktionen är en **periodisk** funktion med **grundperioden** 2π)

ANMÄRKNING: I nedanstående lösningar betecknar k ett heltal (dvs. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Uppgift 12. Lös följande ekvationer

a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ b) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

c) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Svar:

a) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Vi kan också ange svaret i grader:

$x = \pm 60^\circ + k \cdot 360^\circ$

b) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (kolla ovanstående tabell).

c) $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

d) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$$e) x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$f) x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Uppgift 13. Lös ekvationen $\cos(10x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tips. Beteckna $10x - \frac{\pi}{3} = v$ och lös först ekvationen $\cos v = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lösning:

Låt $v = 10x - \frac{\pi}{3}$. Först löser vi ekvationen $\cos v = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vi får följande lösningar

$$v = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{eller} \quad v = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

och därmed

$$10x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{eller} \quad 10x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Härav

$$i) 10x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 10x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{120} + \frac{k\pi}{5}$$

På liknande sätt

$$10x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 10x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{120} + \frac{k\pi}{5}$$

$$\textbf{Svar: } x = \frac{7\pi}{120} + \frac{k\pi}{5} \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{120} + \frac{k\pi}{5}.$$

=====

C) Ekvationer $\tan(x) = a$

Följande egenskaper använder vi ofta när vi löser sådana ekvationer:

1) $\tan x$ har grundperioden π (till skillnad från sinus- och cosinusfunktioner vars grundperiod är 2π).

Alltså

$$\tan(x + k\pi) = \tan x,$$

2) $\tan x$ är en udda funktion

$$\tan(-x) = -\tan x$$

3) $\tan x$ har värdemängden $(-\infty, \infty)$ och därmed är ekvationen

$\tan x = a$ lösbart för varje a .

Båda har oändligt många lösningar:

Om $x = v_1$ är en lösning till $\tan x = a$ så får vi alla lösningar genom $x = v_1 + k\pi$.

4) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ är definierad om $\cos x \neq 0$ dvs om $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

I nedanstående tabeller har vi funktionernas värden för viktiga vinklar

vinkeln v	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan(v)	ej def	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ej def

ANMÄRKNING: I nedanstående lösningar betecknar k ett heltal (dvs. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Uppgift 14. Lös följande ekvationer

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \tan(x) = 0 & \text{b) } \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{c) } \tan(x) = -1, & \text{d) } \tan(x) = -\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Svar: a) } x = k\pi & \text{b) } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{c) } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi & \text{d) } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}$$

Uppgift 15. Beräkna $\cos v$ och $\tan v$ då $\sin v = \frac{3}{5}$ och

$$\text{a) } 0 < v < 90^\circ \quad \text{b) } 90^\circ < v < 180^\circ$$

a) Från trigonometriska ettan har vi

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1 \Rightarrow \cos^2 v = 1 - \sin^2 v \Rightarrow \cos v = \pm \sqrt{1 - \sin^2 v}$$

Om $0 < v < 90^\circ$ ligger vinkeln v i första kvadranten där $\cos v$ är positiv. Därför väljer vi tecknet + dvs

$$\cos v = +\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Slutligen } \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

b) I andra kvadranten är $\cos v$ negativ. Därför väljer vi tecknet $-$ dvs.

$$\cos v = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Därefter } \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$