

Om deluppgift 4, Inlämningsuppgift 6. SF1661 Perspektiv på Matematik

Uppgiftens lydelse

Ange största möjliga reella definitionsmängd D till funktionen

$$h(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

och bestäm också tillhörande värdemängd V .

Visa att funktionen $h : D \rightarrow V$ är inverterbar.

Bestäm också inversfunktionen h^{-1} , och ange definitionsmängd och värdemängd för h^{-1} .

Verifiera slutligen att $h(h^{-1}(x))$ och $h^{-1}(h(x))$ för alla där respektive sammansatt funktion är definierad.

Lösningsförslag

Största möjliga reella definitionsmängd för uttrycket $\frac{1+x}{1-x}$ är $D = D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$, eftersom det enda vi behöver undvika är att få noll i nämnaren.

Det är klart att värdemängden $V = V_h$ är en delmängd av de reella talen, vi bestämmer nu precis hur V_h ser ut. Vi låter y var ett reellt tal och undersöker vilka villkor som vi behöver ställa på y för att det ska tillhöra värdemängden.

$$y \in V_h \iff \text{Det finns ett } x \in D_h \text{ sådan att } h(x) = y$$

dvs, vi söker y sådana att vi kan hitta ett $x \in D_h$ som löser ekvationen $y = \frac{1+x}{1-x}$.

$$y = \frac{1+x}{1-x} \iff (1-x)y = 1+x \iff y - xy = 1+x$$

$$\iff y - 1 = xy + x \iff x(y+1) = y-1$$

Vi observerar att om att $y = -1$ ger den sista ekvationen en motsägelse $0 = -2$, så speciellt finns inget x som uppfyller ekvationen, och följaktligen är $-1 \notin V_h$.

Om däremot $y \neq -1$ är den sista ekvationen ovan i sin tur ekvivalnet med att

$$x = \frac{y-1}{y+1}.$$

Alltså, om $y \neq -1$ gäller att $h(x) = y$ har en lösning, nämligen $x = \frac{y-1}{y+1}$. Så $V_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.

Av beräkningen ovan framgår också att $h(x) = y \iff x = \frac{y-1}{y+1}$, detta eftersom ekvationslösningen är en ekvivalens i varje steg. Det

innebär att lösningen är unik, till varje $y \in V_h$ finns **exakt ett** $x \in D_h$ sådant $y = h(x)$. Detta innebär i sin tur att h är en bijektion och därmed inverterbar. Inversen ges h^{-1} ges av att

$$x = h^{-1}(y) \iff y = h(x), \text{ så enligt ovan är } h^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}.$$

Definitionsmängd och värdemängd till inversen h^{-1} ges som alltid av att

$$D_{h^{-1}} = V_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} \text{ och } V_{h^{-1}} = D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Slutligen verifierar vi att

$$h^{-1}(h(x))(x) = \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x$$

och att

$$h(h^{-1}(x))(x) = \frac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$