

Föreläsning 12, 5/10 2022

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.KTH.se

Funktionsbegreppet

Inverterbara funktioner och deras inverser

$$\underline{f(x) = x^2 + 1}$$

Definitionsmängd:
("tillåtna x -värden")

$$D_f = \mathbb{R} \quad (t.e.)$$

Värdemängd: $V_f = [0, \infty)$, om $D_f = \mathbb{R}$
("de y -värden som fås från definitionsmängd.")



$$h(x) = \sqrt{x-1}$$

Definitionsmängd:

$$D_h = [1, \infty)$$

Värtemängd:

$$V_h = [0, \infty)$$



$A(x)$ är arean hos rektangel
med omkrets $O=10$ och
en sidas längd x



$$A(x) = x(5-x)$$

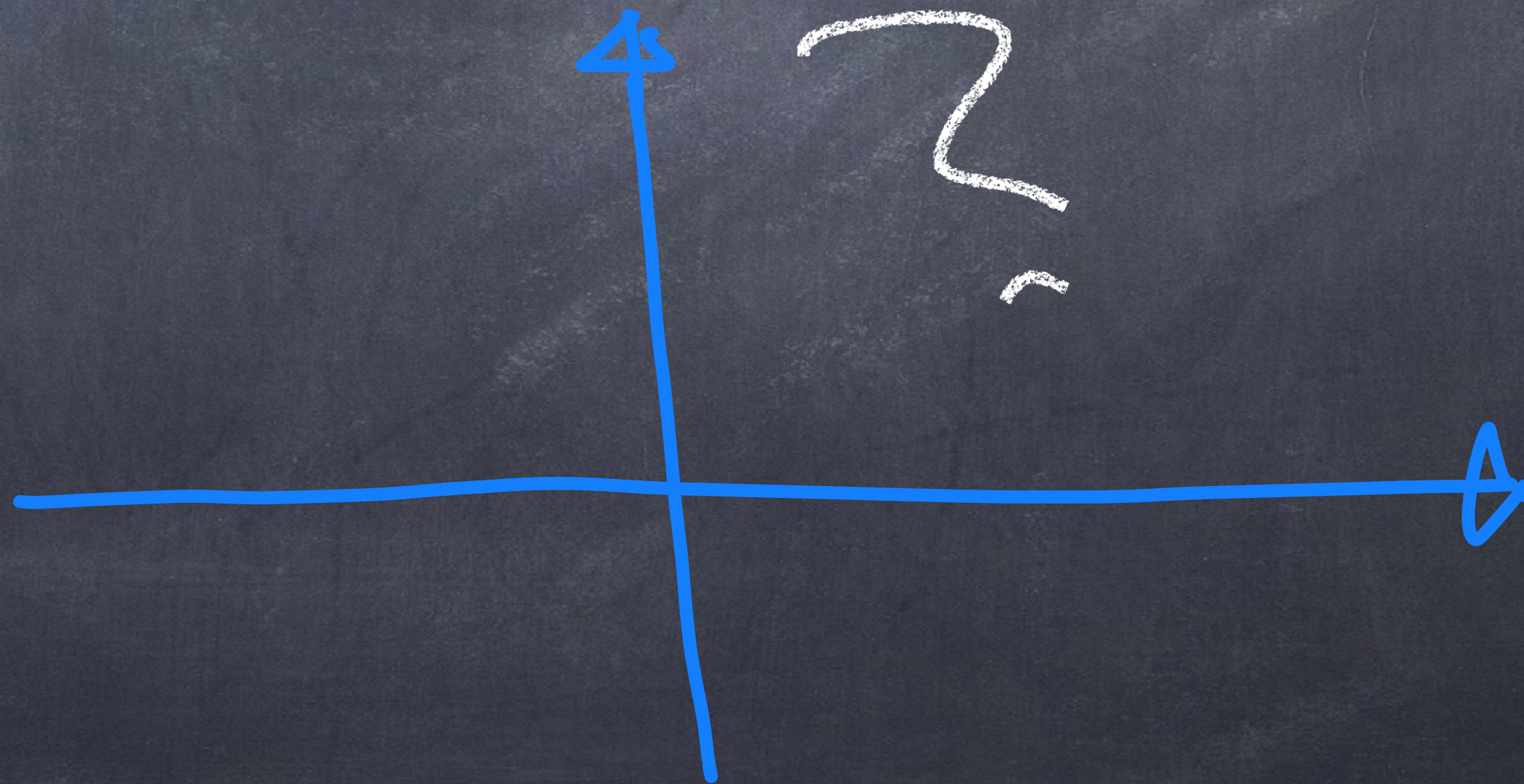
Definitionsomängd: $D_A = (0, 5)$

Värdesomängd: $\mathbb{Z}$ (kräver beräkning)

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{e^x + x^2}$$

Definitionsmängd: $D_g = [1, \infty)$

Värdemängd: $\mathbb{Z}$ (svår att bestämma)



Skivsätt (ex. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{e^x + x^2}$)

$$g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$D_g = \text{Def. mngd}$

Målmngd

Värdomängd:

$$V_g \subseteq \text{Målmngd} = \mathbb{R}$$

= ?

Några exempel från kursen

$$\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$V_{\pi} = \mathbb{N}$$

$$\pi(n) = \text{"antal primtal } \leq n \text{"}$$

$$A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$V_A \subset \mathbb{Q}$$

$$A(n) = \frac{\pi(n)}{n} = \text{"andelen primtal i } \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{"}$$

$$d: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(z) = |z|$$

$$r: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$r(z) = iz$$

$$q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$q(z) = z^2$$

$$V_d = [0, \infty)$$

$$V_r = \mathbb{C}$$

$$V_q = \mathbb{C}$$

(kräver lite
efter tanke?)

$$k: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$k(a) = 3, \quad k(b) = 1, \quad k(c) = 2$$



$$K : \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$K(n) = 2n$$

$$V_K = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$F : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$F(n) = n!$$

$$V_F = \mathbb{N}$$

$$A : \{(x, y) : x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow (0, \infty)$$

$$A(x, y) = xy$$

$$V_A = (0, \infty)$$

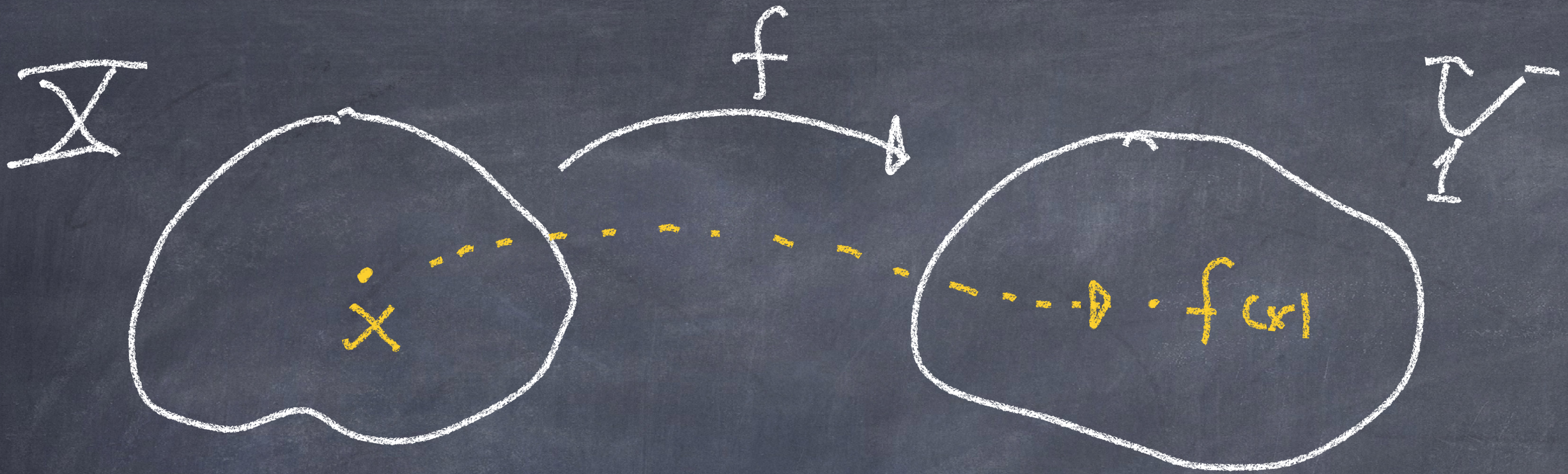
Definition En funktion f
från en mängd X till en mängd Y ,

$$f: X \rightarrow Y$$

är en regel som till varje $x \in X$
ger exakt ett $y = f(x) \in Y$.

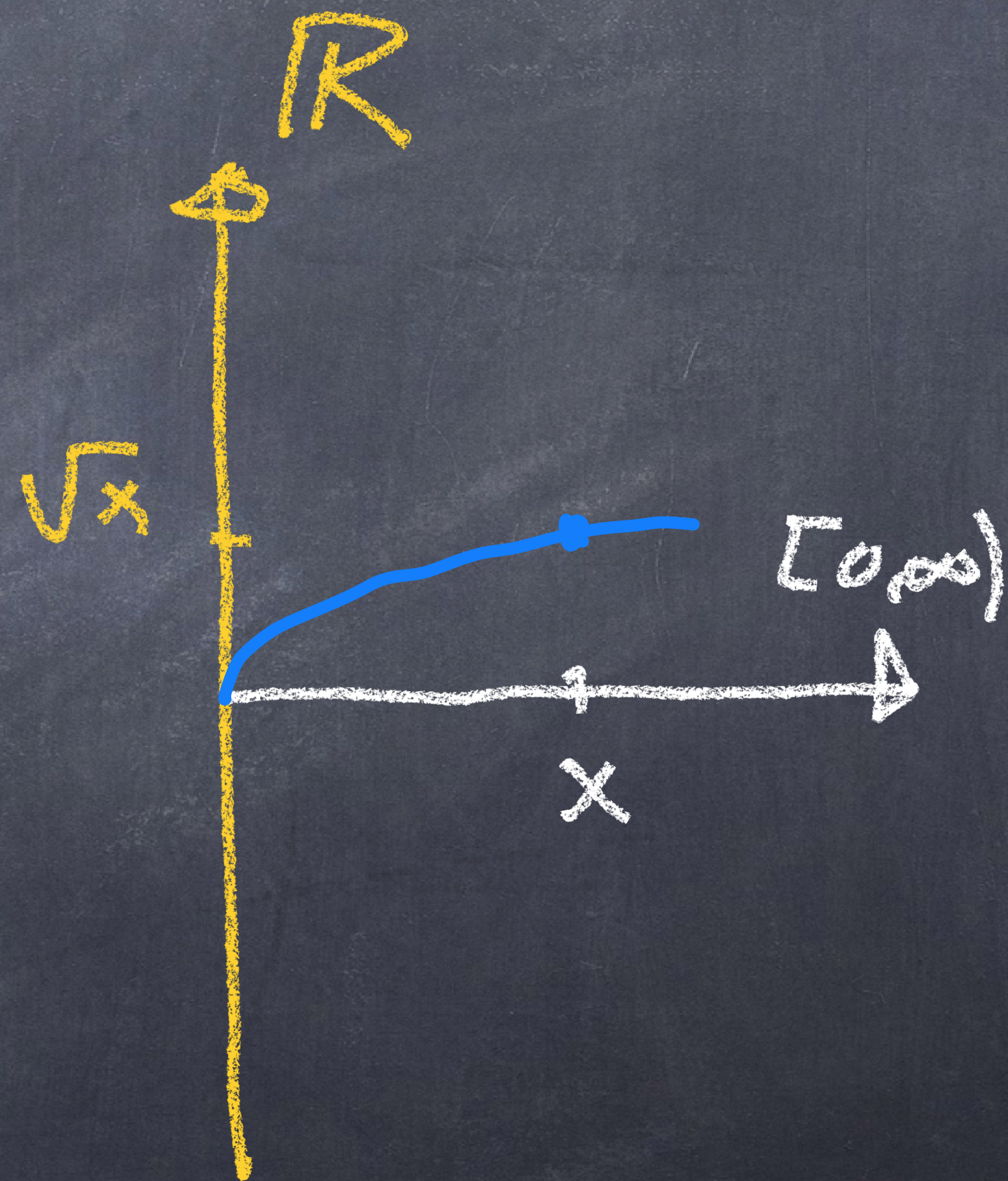
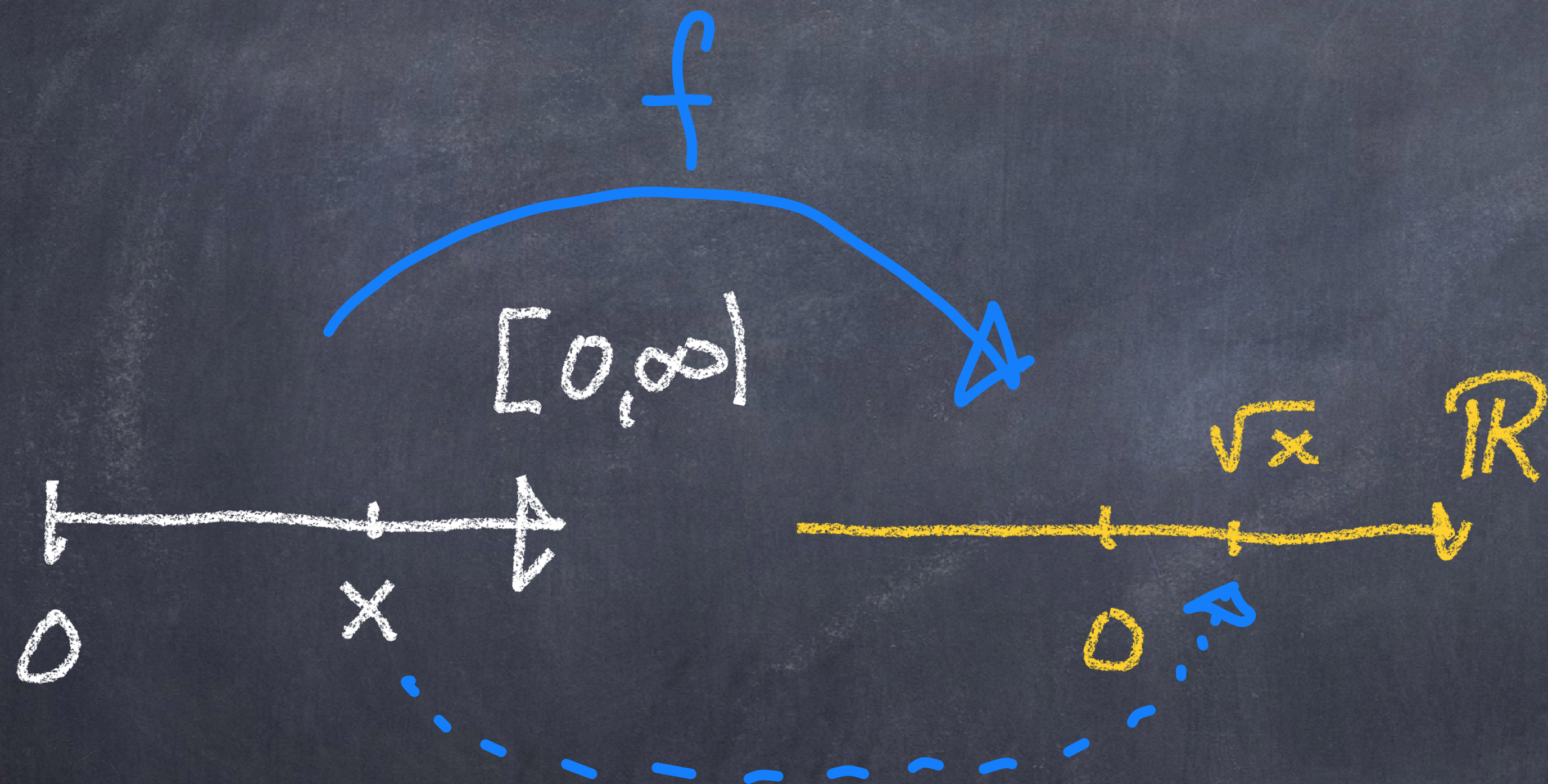
X kallas **definitions mängd** till f
(skrivs även D_f)

Y kallas **mål(mängden)** till f .



Exempel: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x}$$



Definition Den kartesiska produkten

$X \times Y$ av två mängder X och Y

definieras som

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$$

Definition Den kartesiska produkten

$X \times Y$ av två mängder X och Y

definieras som

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y \}$$

Exempel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

är vanliga xy -planet.

Alternativ definition av funktion (enl läroboken).

En funktion $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ är
en delmängd till $\underline{X} \times \underline{Y}$ ($f \subseteq \underline{X} \times \underline{Y}$)
sådan att för varje $x \in \underline{X}$
finns exakt ett element $(x, y) \in f$
(dvs $y = f(x)$)

Exempel: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

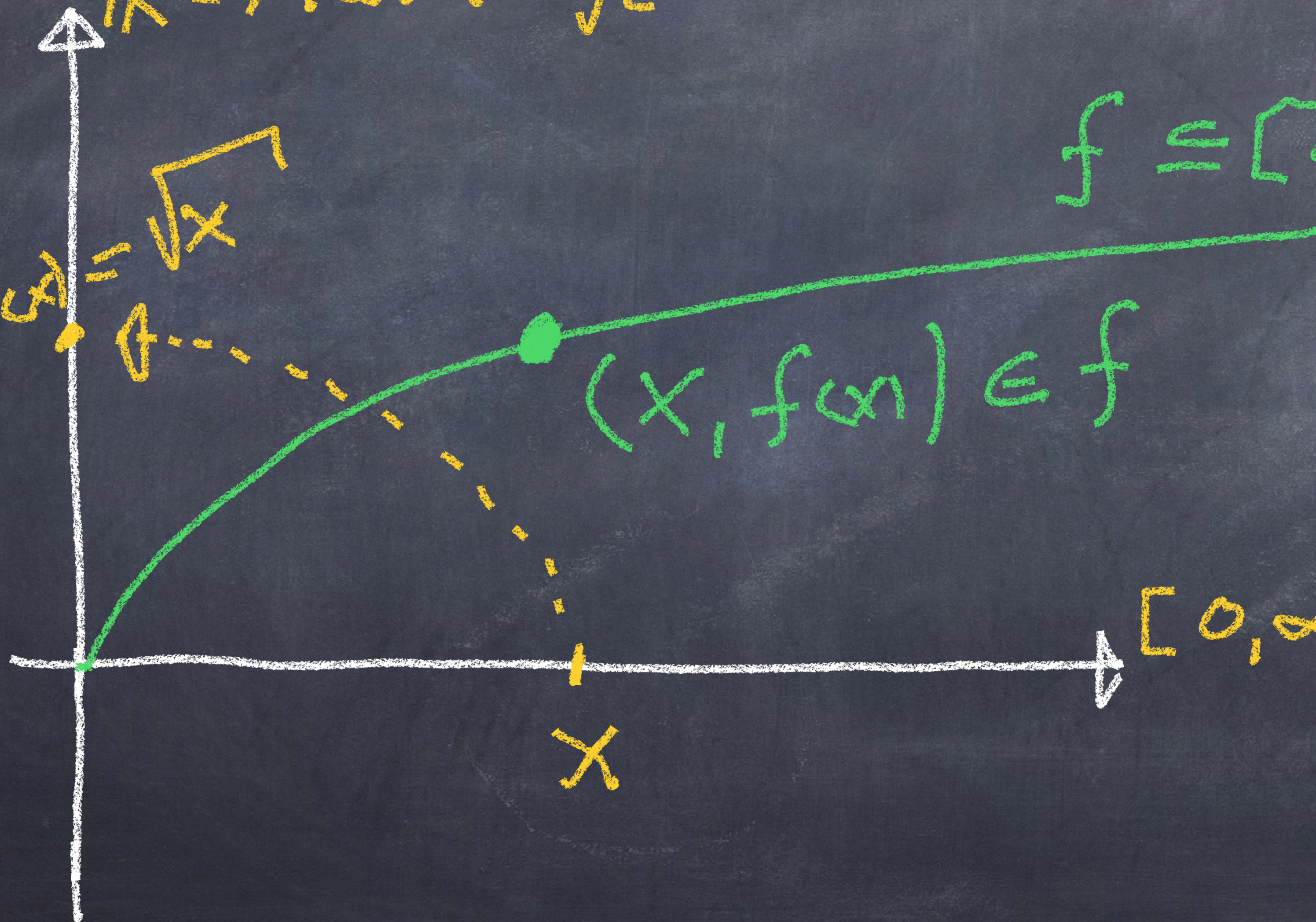
$\mathbb{R} = \text{Målmängd}$

$f \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$y = f(x) = \sqrt{x}$

$(x, f(x)) \in f$

$[0, \infty) = \text{Def. mngd}$



Värdeområdet V_f

till en funktion $f: \underline{X} \rightarrow Y$

är den delmängd till

målmängden Y som ges av

$$V_f = \left\{ y \in Y : y = f(x), \text{ för något } x \in \underline{X} \right\}$$

= "mängden av funktionsvärden"

Exempel: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

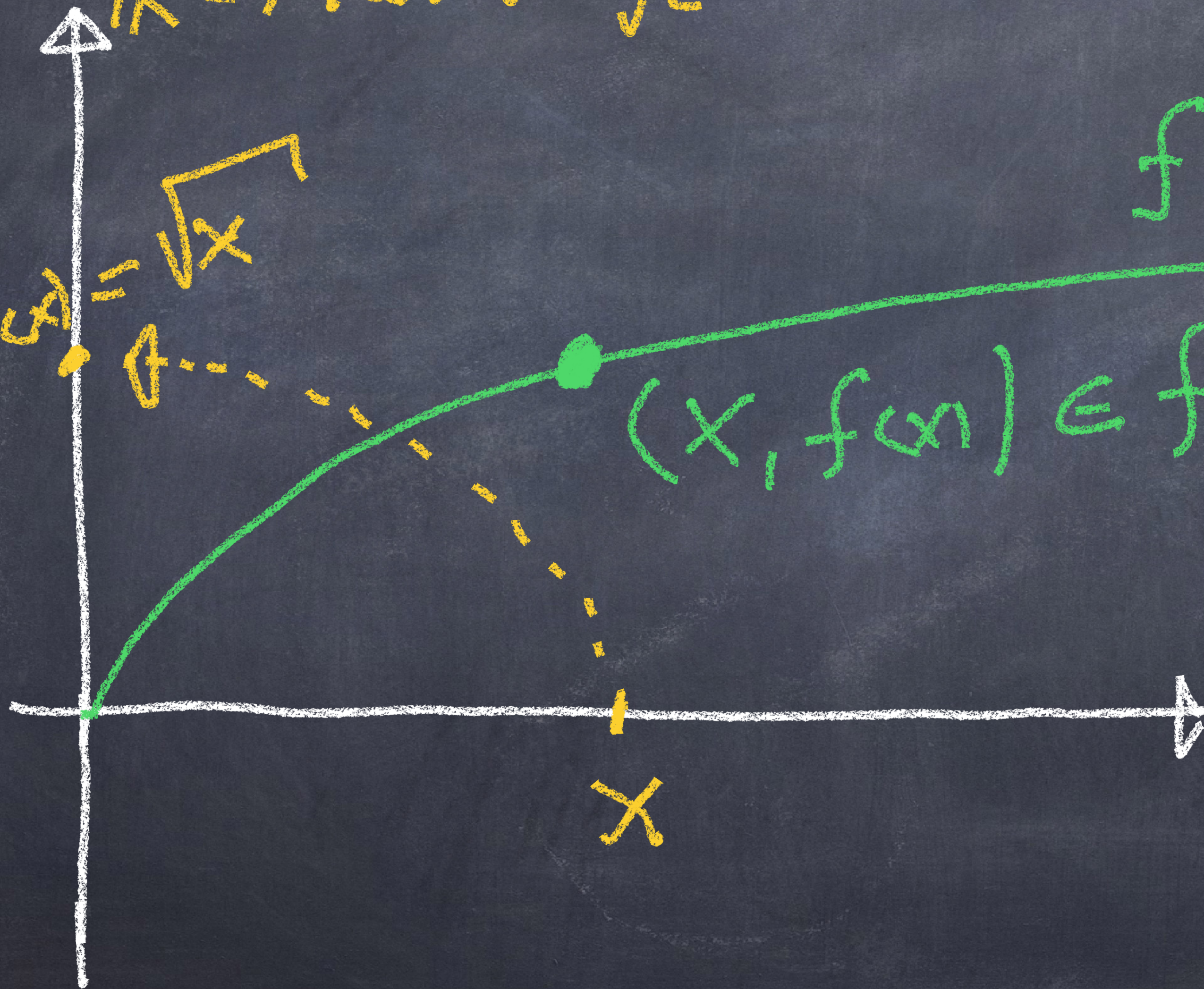
$\mathbb{R} = \text{Målmängd}$

$f \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$y = f(x) = \sqrt{x}$

$(x, f(x)) \in f$

$[0, \infty) = \text{Def. mngd}$



Exempel: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

$\mathbb{R} = \text{Målmängd}$

$f \subseteq [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$y = f(x) = \sqrt{x}$

$(x, f(x)) \in f$

$[0, \infty) = \text{Def. mngd}$

$V_f = \text{Värdemängd} = [0, \infty)$

$= \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ ng } \exists x \in D_f\}$

Sammansättning av funktioner

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g(f(x))$$

Sammansättning av funktioner

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g(f(x))$$

Förutsätter att $f(x) \in D_g, \forall x$

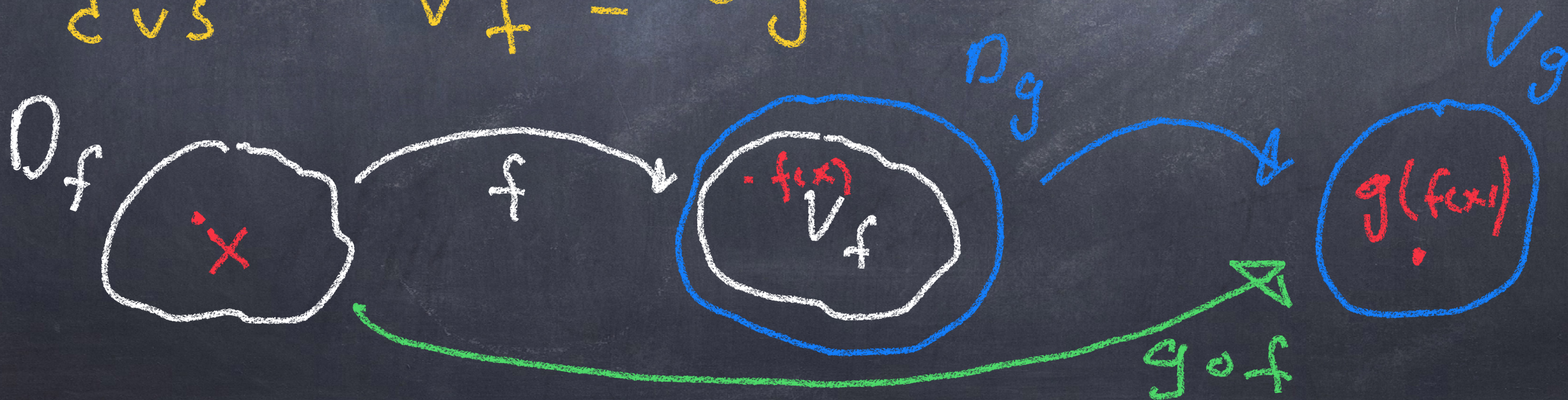
dvs $V_f \subseteq D_g$

Sammansättning av funktioner

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} g(f(x))$$

Förutsätter att $f(x) \in D_g, \forall x$

dvs $V_f \subseteq D_g$



Uppgift: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = 1/t$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{x^2 + 1}_t) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$V_f = [1, \infty) \subseteq D_g \quad g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1$$

$$V_g \subseteq \mathbb{R} = D_f \quad \underline{\text{OBS:}} \quad g \circ f \neq f \circ g$$

Exempel:

$$a: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a(z) = |z|$$

$$s: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s(x) = \sin x$$

$$s \circ a \quad ? \quad (s \circ a)(z) = s(a(z)) = s(|z|) = \sin |z|$$

$$a \circ s \quad ? \quad (a \circ s)(x) = a(s(x))$$

$$= a(\sin x) = |\sin x|$$

När kan man

"vända på"

en funktion?

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$

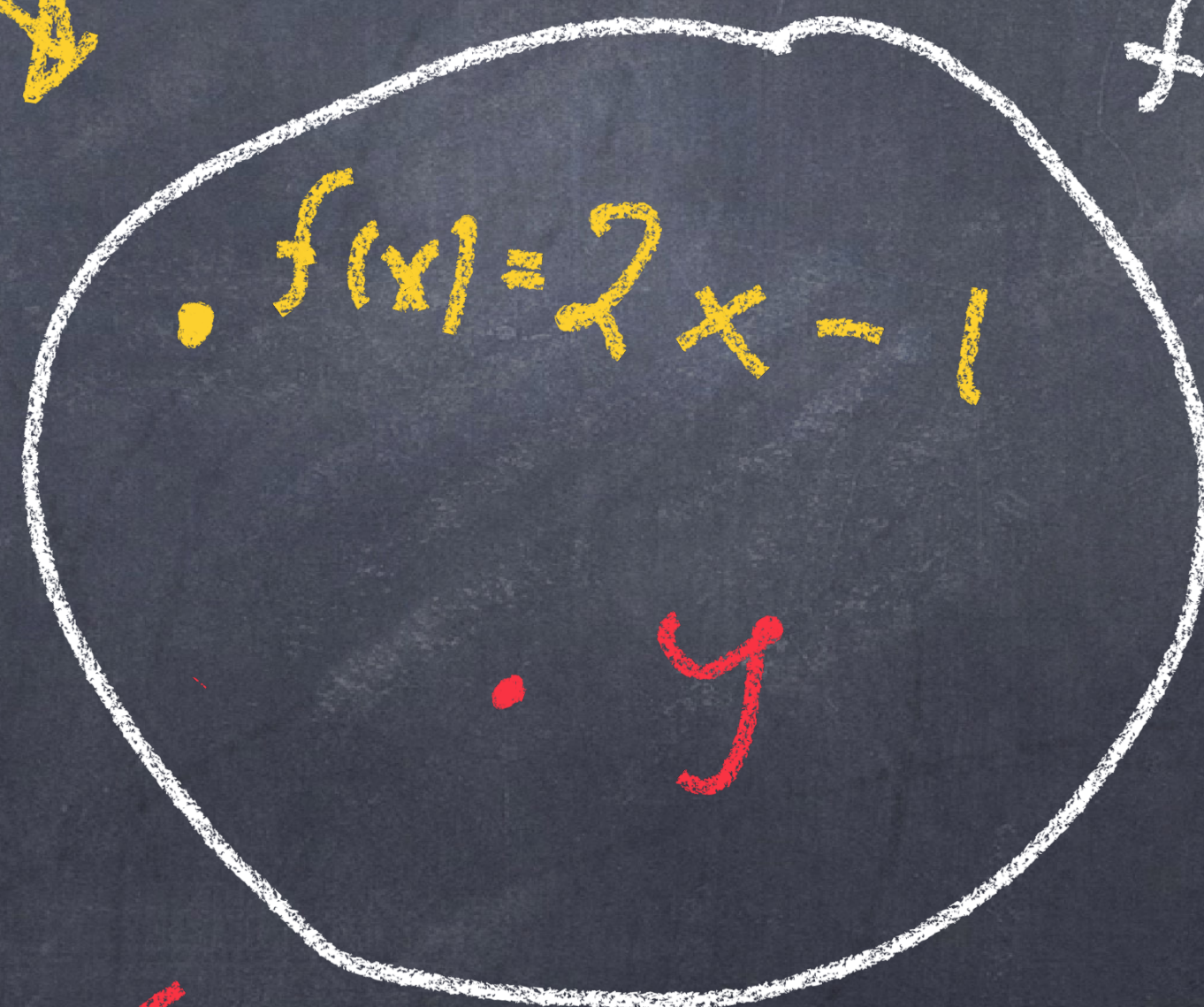
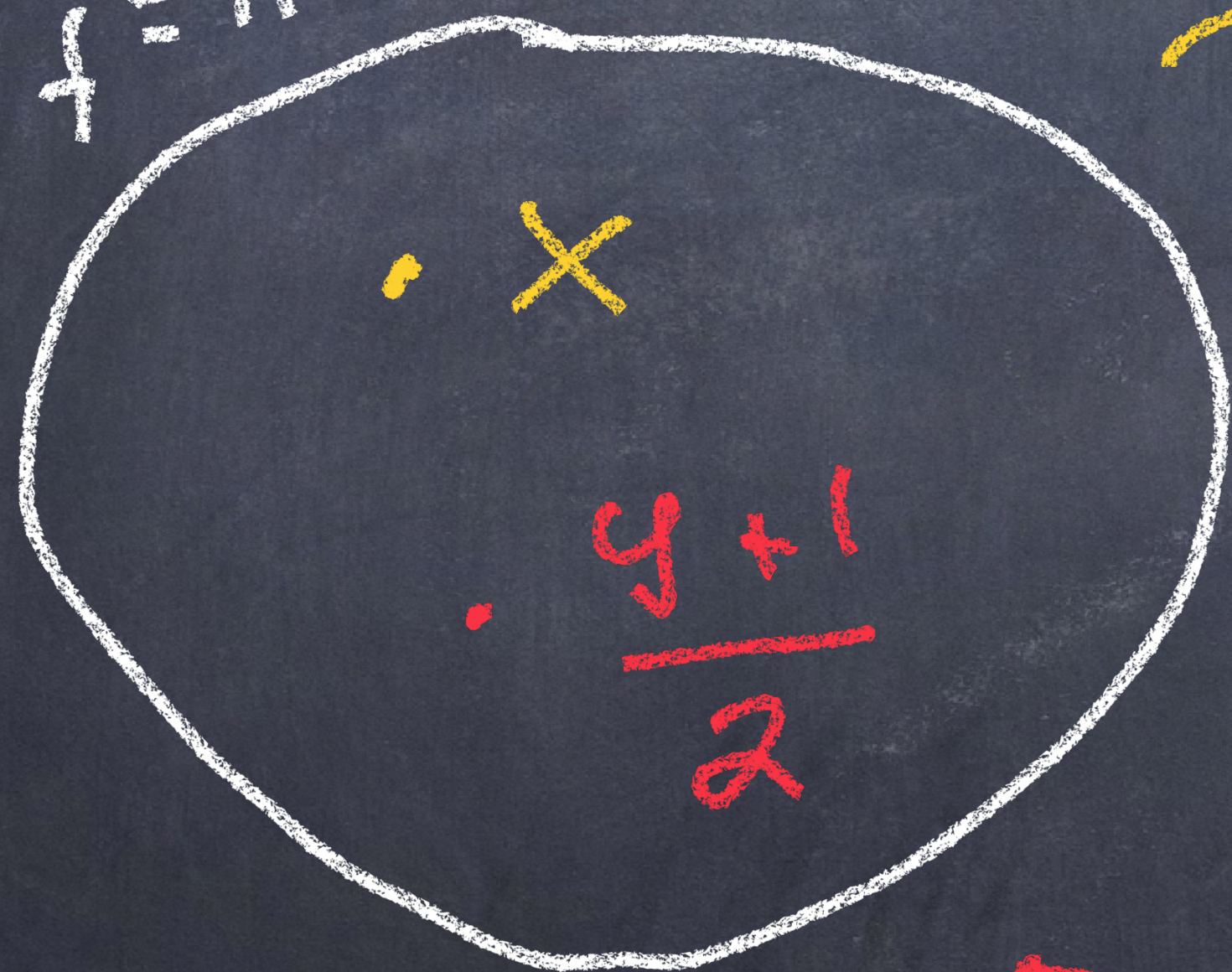
$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y + 1}{2}$$

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 1$

$$y = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y+1}{2}$$

$D_f = \mathbb{R}$

$\text{Ma}^{\text{el}}_{\text{wp}} = V_f = \mathbb{R}$

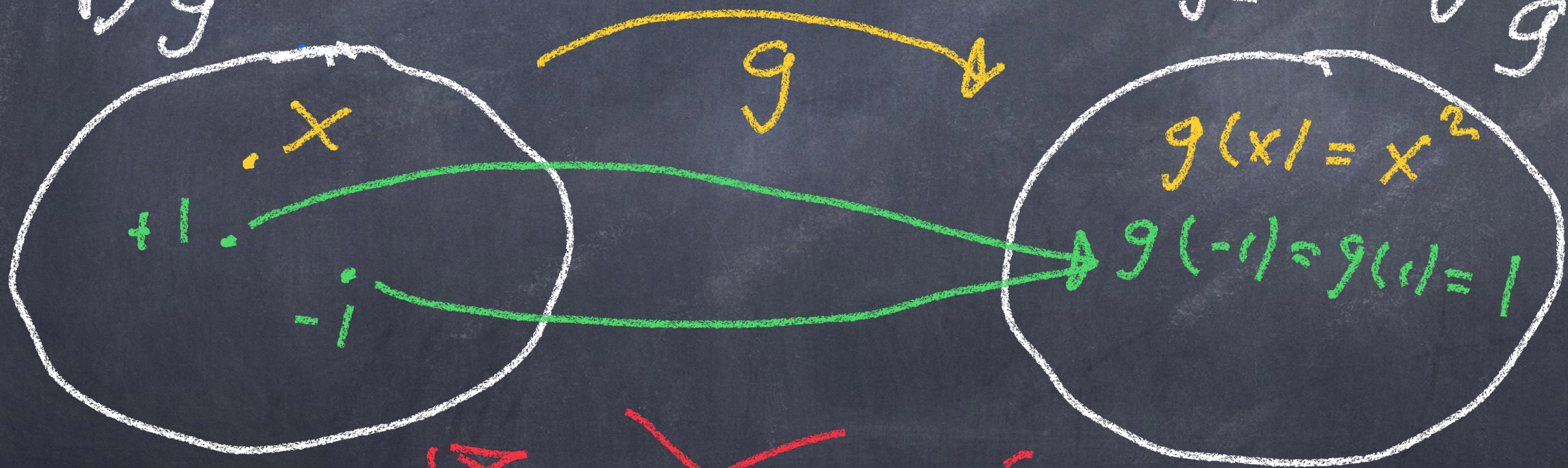


$$g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \vee x = -\sqrt{y}$$

Dg

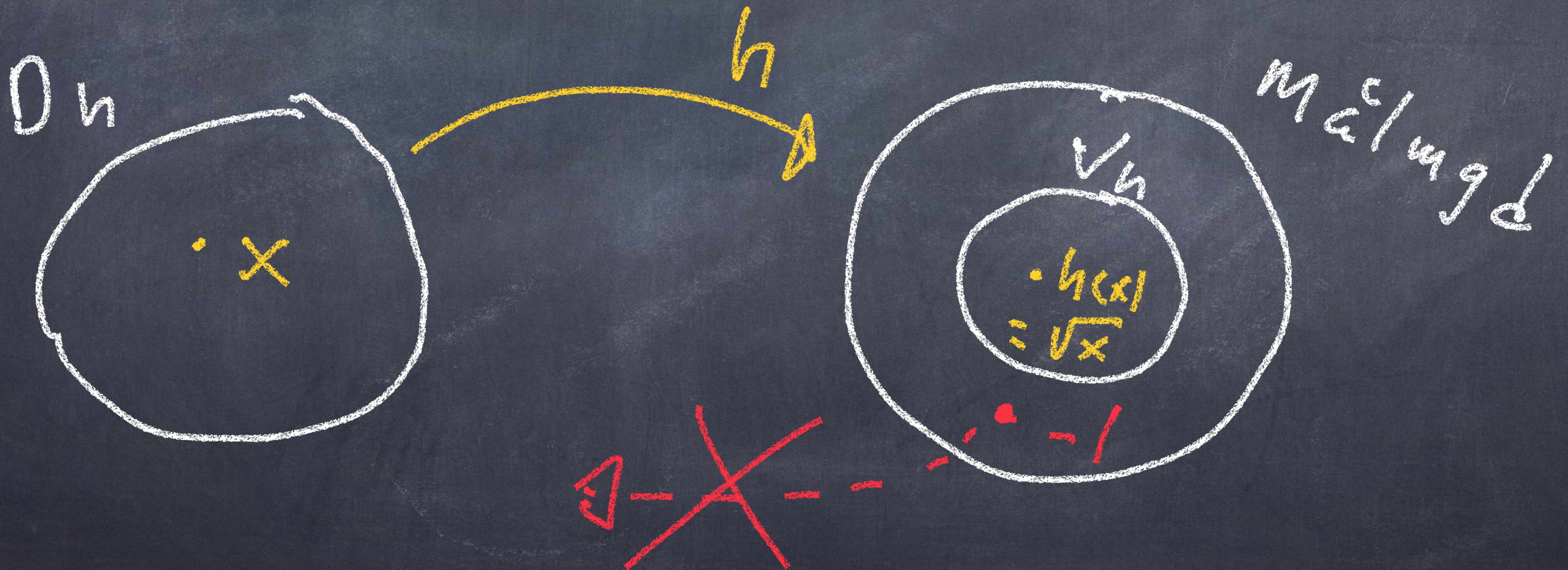
$$M_{\text{alg}}^{\text{alg}} = \sqrt{g}$$



~~...~~

$$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2, \quad y \geq 0$$



En funktion

$$f: \underline{X} \rightarrow Y \quad \text{"är"}$$

injektiv : en injektion;

$$\text{om } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Ex: • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ Är injektiv

• $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$ Er injektiv

$f(x) = 2x - 1$ ÄR injektiv ty:

Antag att $f(a) = f(b)$ dvs

$$2a - 1 = 2b - 1 \implies 2a = 2b \implies a = b$$

$g(x) = x^2$ är EJ injektiv ty:

Ex $g(-2) = g(2) = 4$

En funktion $f: X \rightarrow Y$

är surjektiv [en surjektion]:

om det för varje $y \in Y$

finns $x \in X$ sådant att $y = f(x)$!

Dvs, f är surjektiv

om målmängden $Y =$ värdemängden V_f

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x - 1$$

ÄR surjektiv $\in y \dots \dots$

Tag ett (godtyckligt) y_0
i värdemängden $\mathbb{R}$, visa att
det finns x_0 i def. mngd $\mathbb{R}$

s.a. $f(x_0) = y_0$

Söker x_0 s.a. $f(x_0) = y_0$

dos $2x_0 - 1 = y_0 \iff x_0 = \frac{y_0 + 1}{2}$

$g(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ $g(x) = x^2$
ÄR också surjektiv t.g.

Tag $y_0 \in [0, \infty)$

Sök $x_0 \in \mathbb{R}$ s.a.

$$x_0^2 = y_0 \Leftrightarrow x_0 = \pm \sqrt{y_0}$$

$$\vee x_0 = -\sqrt{y_0}$$

$$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$$

„ $\exists$ “ surjektion bzgl.

Ex:

$$\sqrt{x} \neq -1$$

$$\text{d.h. } -1 \notin \text{Menge} = \mathbb{R}$$

„ $\forall$ “

es

für $\forall$ Elemente

En funktion $f: \underline{X} \rightarrow Y$

är **bijektiv** : en **bijektion**:

om det till varje $y \in Y$

finns exakt ett $x \in X$ s.a $y = f(x)$



En funktion $f: \underline{X} \rightarrow Y$
 är **bijektiv** (en bijektion)
 om det till varje $y \in Y$
 finns exakt ett $x \in \underline{X}$ s.a. $y = f(x)$



bijektiv $\iff$ injektiv och surjektiv

För en bijektiv $f: \underline{X} \rightarrow Y$

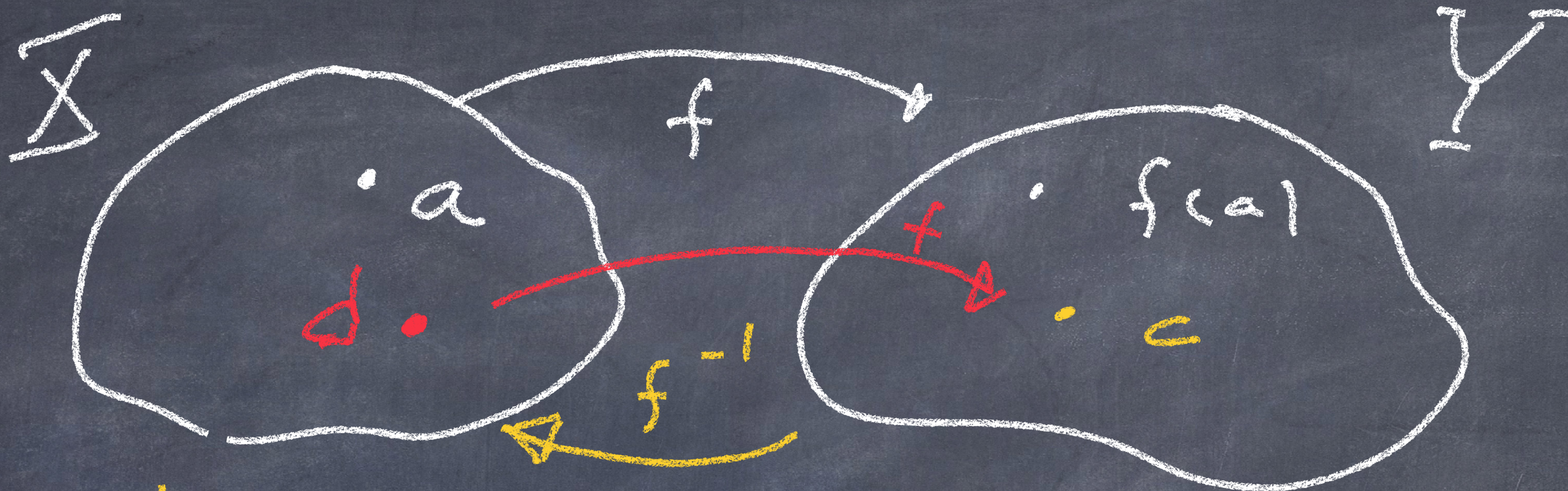
kan vi definiera

den inversa funktionen

$$f^{-1}: Y \rightarrow \underline{X}$$

genom

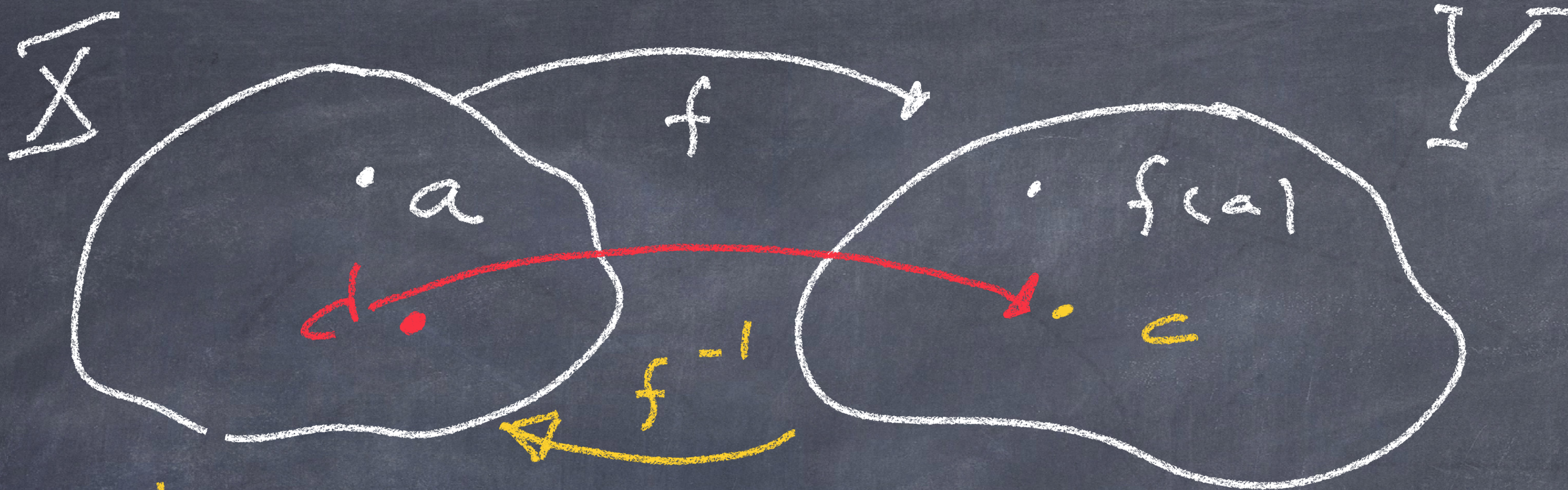
$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$



$f^{-1}(c)$ bestäms genom att

hitta det unika $d \in X$

s.a. $f(d) = c$, ger $f^{-1}(c) = d$



$f^{-1}(c)$ bestäms genom att

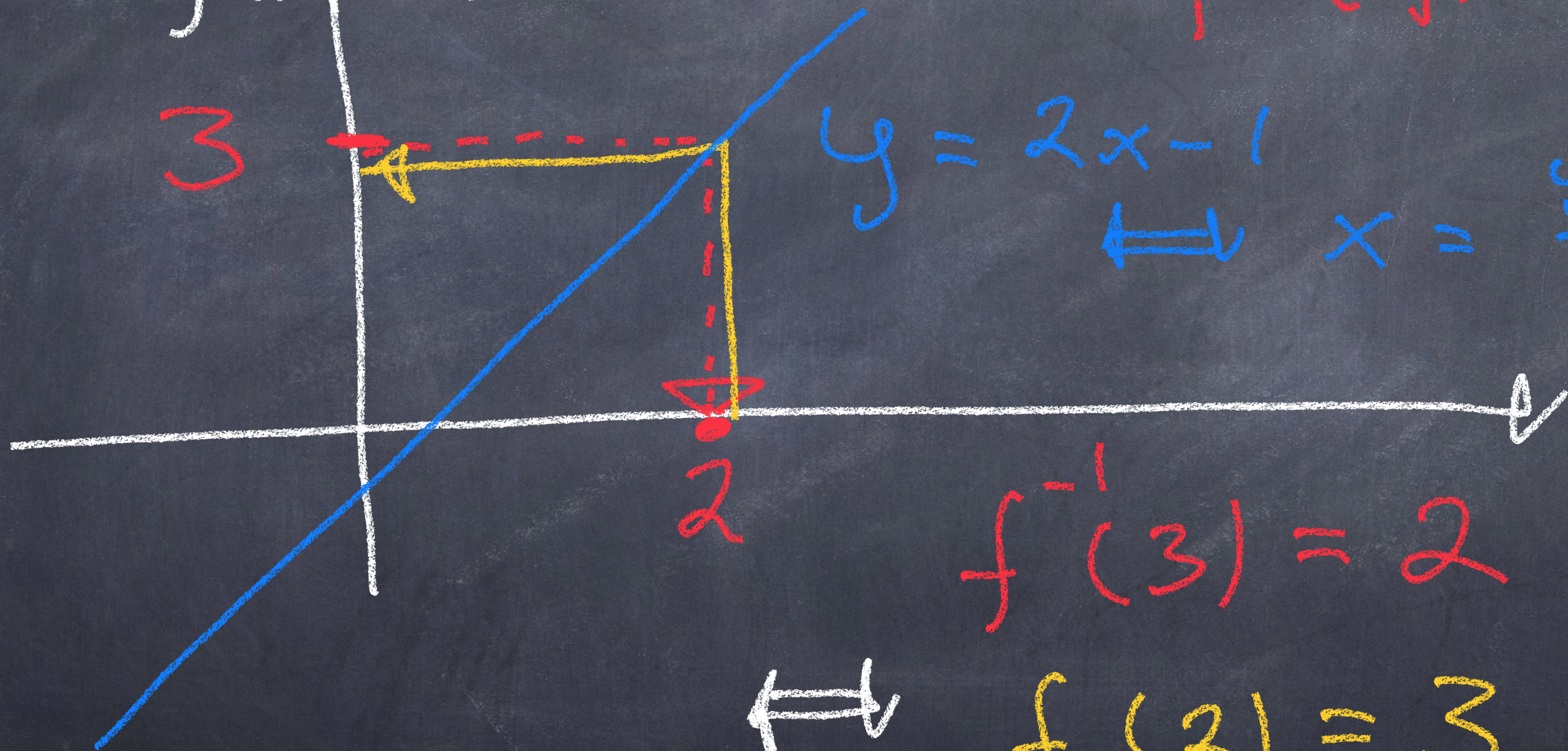
hitta det unika $d \in X$

s.a. $f(d) = c$, ger $f^{-1}(c) = d$

$$D_f = X = V_{f^{-1}} \quad V_f = Y = D_{f^{-1}}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x - 1$$



$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$$

$$y = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(3) = 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f(2) = 3$$

$$K: \mathbb{N} \rightarrow \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$K(n) = 2n$$

Bijektif

$$K^{-1}(n) = \frac{n}{2}$$

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$F(n) = n!$$

Injektion

menjadi

surjektif

$$A: \{(x, y) : x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow (0, \infty)$$

$$A(x, y) = xy$$

Surjektif

menjadi

injektif

Uppgift:

Visa att $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1-x}{3}$$

är invertierbar.

och bestäm inversen

f^{-1}

Vi behöver visa att f är
injektiv och surjektiv.

Injektiv: Antag att $f(a) = f(b)$

$$\text{dus } \frac{1-a}{3} = \frac{1-b}{3} \Rightarrow 1-a = 1-b \Rightarrow a = b$$

Surjektiv: Tag ett $y_0 \in \mathbb{R}$. Vi ska
visa att det finns x_0 s.d. $f(x_0) = y_0$

$$y_0 = \frac{1-x_0}{3} \Rightarrow 3y_0 = 1-x_0 \Rightarrow x_0 = 1-3y_0$$

Alternativt kan vi visa direkt
att det för varje $y_0 \in \mathbb{R}$ (målmgd)
exakt ett $x_0 \in \mathbb{R}$ (def. mgd)

$$\text{s.a. } f(x) = y_0.$$

$$y_0 = f(x) \iff y_0 = \frac{1-x}{3}$$

$$\iff 3y_0 = 1 - x_0 \iff x_0 = 1 - 3y_0$$

Alternativt kan vi visa direkt
att det för varje $y_0 \in \mathbb{R}$ (målmngd)
exakt ett $x_0 \in \mathbb{R}$ (def. mngd)

$$\text{s.a. } f(x) = y_0.$$

$$y_0 = f(x) \iff y_0 = \frac{1-x}{3}$$

$$\iff 3y_0 = 1-x \iff x = 1-3y_0$$

Alltså är f bijektiv och inverterbar
och $y = f(x) \iff x = 1-3y$ så $f^{-1}(y) = 1-3y$

När man bestämmer $f^{-1}(y) = 1 - 3y$

Gyter man ofta namn på variabelerna
och skriver

$f^{-1}(x) = 1 - 3x$

OBS: $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$

ger alt

$$(f^{-1} \circ f)(\underline{x}) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = \underline{x}$$

$$\forall x \in D_f = V_f^{-1}$$

$$(f \circ f^{-1})(\underline{y}) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = \underline{y}$$

$$\forall y \in D_{f^{-1}} = V_f$$

Uppgift: $f(x) = \frac{1-x}{3}$, $f^{-1}(x) = 1-3x$.

Verifiera att

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$$

$L \hat{a} \in$

$$f(x) = \frac{1-x}{3}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - 3x.$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{1 - f^{-1}(x)}{3}$$

$$= \frac{1 - (1 - 3x)}{3} = \frac{3x}{3} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = 1 - 3f(x)$$

$$= 1 - \cancel{3} \cdot \frac{1-x}{\cancel{3}} = 1 - (1-x) = x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Rekursiv definierte funktionen

Ex 1: $F: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(n) = n F(n-1), \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Ex 2: $F: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$

$$F_0 = F(0) = 1$$

$$F_1 = F(1) = 1$$

$$F_n = F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \forall n \geq 2$$

Ex 2: $F: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$

$$F_0 = F(0) = 1$$

$$F_1 = F(1) = 1$$

$$F_n = F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \forall n \geq 2$$

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$

Fibonacci talföljd.

Kan visa:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$