

Några olika bevis och bevistyper. SF1661 Perspektiv på Matematik

Några trigonometriska formler

Additionsformeln för cosinusfunktionen (se sidorna 115 — 116 i läroboken eller bild 18 och 19 till föreläsningsanteckningarna till Föreläsning 9)

- Formulera den s k "additionsformeln" för cosinus
- Gå igenom beviset.
- Skriv upp några "stolpar" till beviset och lär dig dessa.
- Kom tillbaka till denna uppgift om ett par dagar. Genomför beviset med hjälp av dina "stolpar".

Det här är ett bra sätt att lära sig bevis — att memorera några "stolpar" (en översiktsbild av beviset), med vars hjälp man sedan kan fylla i detaljerna var gång man behöver.

Använd nu additionsformeln för cosinus för att bevisa

- "subtraktionsformeln" för cosinus
- "dubblavinkelformeln" för cosinus
- de s k "halvavinkelformlerna", som uttrycker $\cos^2 x$ och $\sin^2 x$ i termer av $\cos 2x$

Dessa bevis har formen av implikationer, t ex

$$\text{additionsformeln} \implies \text{subtraktionsformeln}$$

Rationella rötter till polynom med heltalskoefficienter Exempel på en sats som är en implikation.

SATS: Om $f(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter av gradtal $n \geq 1$, och om p/q är ett nollställe till f , där p och q är heltal utan gemensamma faktorer (förutom ± 1), så gäller att q delar konstanttermen i f och att p delar högstgradskoefficienten i f .

(Se extra materialet till Föreläsning 5)

- Bevisa satsen
- Visa med ett exempel att förutsättningen att p och q saknar gemensamma faktorer är nödvändig för att satsen ska vara sann.

Satsen har här formen av en implikation, OM SÅ

Faktorsatsen - en sats om två ekvivalenta påståenden

(Se läroboken Sats 2.2.7 i läroboken eller föreläsningsanteckningar eller extramaterial till Föreläsning 5)

- Satsen har formen av en ekvivalens, påstående A är sant OM och ENDAST OM påstående B är sant. Sådana satser bevisas ofta, som i detta fall, genom att man visar de två implikationerna $A \implies B$ och $B \implies A$ en i taget.
- Bevisa satsen.
- Observera att beviset fungerar lika bra för polynom med komplexa koefficienter som för polynom med reella koefficienter (detta bygger på att även divisionsalgoritmen för polynom (Sats 2.2.5 i boken) fungerar lika bra för polynom med komplexa koefficienter)

Kontrapositiva bevis (även kallade Indirekta bevis)

Kontrapositiva bevis (indirekta bevis) är bevis där vi bevisar en implikation $A \implies B$ genom att bevisa $\neg B \implies \neg A$, dvs vi visar att negationen till B medför negationen till A .

Ett exempel på detta:

- Bevisa följande påstående om naturliga tal n : "Om n^2 är jämnt delbart med 3 så är också n självt jämnt delbart med 3", genom att bevisa det kontrapositiva påståendet "Om n inte är jämnt delbart med 3 så är inte heller n^2 jämnt delbart med 3"
- Observera att beviset bygger på att 3 är ett primtal. Motsvarande sats är falsk om vi talar om delbarhet med ett tal som inte är ett primtal.
- Det omvända påståendet "Om n är jämnt delbart med 3 så är också n^2 självt jämnt delbart med 3" kan bevisas med direkt implikation. (Alltså gäller i själva verket ekvivalensen " n^2 är jämnt delbart med 3 OMM n självt är jämnt delbart med 3".)

Motsägelsebevis

Dessa bygger på att ett påstående som implicerar en motsägelse måste vara ett falskt påstående. För att bevisa ett påstående A kan vi alltså bevisa att dessa negation $\neg A$ implicerar en motsägelse, ty då är $\neg A$ falskt och alltså är A sant.

Exempel på sådana är de bevis vi har gått igenom i kursen för att $\sqrt{2}$ ej är ett rationellt tal, eller för att det finns oändligt många primtal.

Induktionsbevis

Formulera idén bakom induktionsbevis, och förklara i vilka situationer sådana kan vara användbara.

Ge ett exempel på ett induktionsbevis.