

Föreläsning 11

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

29 september 2022

Mer om komplexa tal och faktorisering av polynom

Faktorsatsen gäller även för polynom med komplexa koefficienter

Faktorsatsen

Om $p(z)$ är ett polynom med komplexa koefficienter, $\text{grad}(p) \geq 1$, och z_0 är ett komplext tal, så gäller att

$$p(z_0) = 0 \iff p(z) = (z - z_0) q(z)$$

där q är ett polynom, $\text{grad}(q) = \text{grad}(p) - 1$.

Faktorsatsen

Exempel

Låt

$$p(z) = z^2 - (2 + i)z + 2i$$

Faktorsatsen

Exempel

Låt

$$p(z) = z^2 - (2 + i)z + 2i$$

Man ser att $z = i$ är ett nollställe till p ,

$$p(i) = i^2 - (2 + i)i + 2i = -1 - 2i + 1 + 2i = 0.$$

Faktorsatsen

Exempel

Låt

$$p(z) = z^2 - (2 + i)z + 2i$$

Man ser att $z = i$ är ett nollställe till p ,

$$p(i) = i^2 - (2 + i)i + 2i = -1 - 2i + 1 + 2i = 0.$$

Enligt factorsatsen är då $(z - i)$ en faktor i p ,

Faktorsatsen

Exempel

Låt

$$p(z) = z^2 - (2 + i)z + 2i$$

Man ser att $z = i$ är ett nollställe till p ,

$$p(i) = i^2 - (2 + i)i + 2i = -1 - 2i + 1 + 2i = 0.$$

Enligt factorsatsen är då $(z - i)$ en faktor i p , och mycket riktigt är

$$p(z) = (z - i)(z - 2)$$

Faktorsatsen

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen

$$x^3 + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i) = 0,$$

då man vet att $x = 1 + 2i$ är en lösning. Skriv också vänster led som produkt av förstagradspolynom.

Faktorsatsen

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen

$$x^3 + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i) = 0,$$

då man vet att $x = 1 + 2i$ är en lösning. Skriv också vänster led som produkt av förstagradspolynom.

Lösning: Sätt $p(x) = x^3 + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i)$.
Eftersom $p(1 + 2i) = 0$ gäller enligt factorsatsen att $(x - (1 + 2i))$ är en faktor i p ,

$$p(x) = (x - (1 + 2i)) q(x)$$

Vi bestämmer q med hjälp av polynomdivision.



Faktorsatsen

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 2 \\
 \hline
 x^3 + (-2-2i)x^2 + (-1+2i)x + (2+4i) \quad \bigg| \quad x - (1+2i) \\
 - (x^3 - (1+2i)x^2) \\
 \hline
 (-1) x^2 + (-1+2i)x + (2+4i) \\
 - (-x^2 + (1+2i)x) \\
 \hline
 -2x + 2+4i \\
 - (-2x + 2(1+2i)) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Faktorsatsen

Alltså är

$$p(x) = (x - (1 + 2i))(x^2 - x - 2)$$

och övriga lösningar till $p(x) = 0$ ges av $x^2 - x - 2 = 0$ dvs $x = -1 \vee x = 2$.

Det innebär också att p kan faktoriseras

$$p(x) = (x - (1 + 2i))(x - 2)(x + 1)$$

Faktorisering av polynom

Algebrans fundamentalsats

Varje polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ grad}(p) \geq 1,$$

där $a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n$, har ett nollställe i det komplexa talplanet.

Faktorisering av polynom

Algebrans fundamentalsats

Varje polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ grad}(p) \geq 1,$$

där $a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n$, har ett nollställe i det komplexa talplanet.

Dvs ekvationen $p(z) = 0$ har (minst) en lösning i det komplexa talplanet.

Faktorisering av polynom

Följdsats till Algebrans fundamentalsats

Varje polynom $p(z)$ med komplexa koefficienter och av gradtal $n \geq 1$ kan faktoriseras som en produkt av en konstant och n stycken förstgradsfaktorer

$$p(z) = \gamma (z - \alpha_1) (z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

där γ och α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ är komplexa tal.

Talen α_i är polynomets samtliga nollställen.

Faktorisering av polynom

Exempel

Låt $p(z) = 2x^3 + (-4 - 4i)x^2 + (-2 + 4i)x + (4 + 8i)$.

Faktorisering av polynom

Exempel

Låt $p(z) = 2x^3 + (-4 - 4i)x^2 + (-2 + 4i)x + (4 + 8i)$. Då är

$$p(z) = 2x^3 + (-4 - 4i)x^2 + (-2 + 4i)x + (4 + 8i)$$

{vi bryter ut en faktor 2}

$$= 2(x^3 + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i))$$

{enligt faktorisering i tidigare exempel}

$$= 2(x - (1 + 2i))(x^2 - x - 2)$$

$$= 2(x - (1 + 2i))(x - 2)(x + 1)$$

Faktorisering av polynom

Faktorerers och nollställens **multiplicitet** — exempel

$$\begin{aligned}f(z) &= x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \\ &= x^3 (x - 1)^2 (x + i) (x - i)\end{aligned}$$

Faktorisering av polynom

Faktorer och nollställens **multiplicitet** — exempel

$$\begin{aligned}f(z) &= x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \\ &= x^3 (x - 1)^2 (x + i)(x - i)\end{aligned}$$

Faktorn x och motsv. nollställe $x = 0$ har **multiplicitet 3**

Faktorisering av polynom

Faktorer och nollställens **multiplicitet** — exempel

$$\begin{aligned}f(z) &= x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \\ &= x^3 (x - 1)^2 (x + i)(x - i)\end{aligned}$$

Faktorn x och motsv. nollställe $x = 0$ har **multiplicitet 3**

Faktorn $x - 1$ och motsv. nollställe $x = 1$ har **multiplicitet 2**

Faktorisering av polynom

Faktorers och nollställens **multiplicitet** — exempel

$$\begin{aligned}f(z) &= x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 \\ &= x^3 (x - 1)^2 (x + i)(x - i)\end{aligned}$$

Faktorn x och motsv. nollställe $x = 0$ har **multiplicitet 3**

Faktorn $x - 1$ och motsv. nollställe $x = 1$ har **multiplicitet 2**

Faktorn $x - i$ och motsv. nollställe $x = i$ har **multiplicitet 1**

Faktorn $x + i$ och motsv. nollställe $x = -i$ har **multiplicitet 1**

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$
Enligt Algebrans fundamental sats finns ett tal α_1 sådant att $p(\alpha_1) = 0$.

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns ett tal α_1 sådant att $p(\alpha_1) = 0$.

Enligt faktorsatsen kan vi då skriva $p(z) = (z - \alpha_1)q(z)$ där $q(z)$ är polynom av gradtal $n - 1$

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns ett tal α_1 sådant att $p(\alpha_1) = 0$.

Enligt faktorsatsen kan vi då skriva $p(z) = (z - \alpha_1)q(z)$ där $q(z)$ är polynom av gradtal $n - 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns nu ett tal α_2 sådant att $q(\alpha_2) = 0$, och enligt faktorsatsen får vi då

$$p(z) = (z - \alpha_1)q(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)r(z)$$

där r är ett polynom av grad $n - 2$

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns ett tal α_1 sådant att $p(\alpha_1) = 0$.

Enligt faktorsatsen kan vi då skriva $p(z) = (z - \alpha_1)q(z)$ där $q(z)$ är polynom av gradtal $n - 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns nu ett tal α_2 sådant att $q(\alpha_2) = 0$, och enligt faktorsatsen får vi då

$$p(z) = (z - \alpha_1)q(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)r(z)$$

där r är ett polynom av grad $n - 2$

osv osv tills vi skrivit p som en produkt av n första gradspolynom och en konstant.

Följdsats till Algebrans fundamentalsats - bevisidé

Sats: Ett polynom $p(z)$ av grad $n \geq 1$ med komplexa koefficienter kan skrivas som en produkt av en konstant och n stycken förstegradspolynom på formen $(z - \alpha)$.

Bevisidé: Tag $p(z)$ av gradtal $n \geq 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns ett tal α_1 sådant att $p(\alpha_1) = 0$.

Enligt faktorsatsen kan vi då skriva $p(z) = (z - \alpha_1)q(z)$ där $q(z)$ är polynom av gradtal $n - 1$

Enligt Algebrans fundamental sats finns nu ett tal α_2 sådant att $q(\alpha_2) = 0$, och enligt faktorsatsen får vi då

$$p(z) = (z - \alpha_1)q(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)r(z)$$

där r är ett polynom av grad $n - 2$

osv osv tills vi skrivit p som en produkt av n första gradspolynom och en konstant. OBS: Kan formuleras mer strikt med **induktion** över gradtalet n .

Faktorisering av polynom

Vi vet nu att n :te-grads polynom med **komplexa** koefficienter alltid kan faktoriseras fullständigt till en produkt av n st. förstegradspolynom med **komplexa** koefficienter.

Faktorisering av polynom

Vi vet nu att n :te-grads polynom med **komplexa** koefficienter alltid kan faktoriseras fullständigt till en produkt av n st. förstegradspolynom med **komplexa** koefficienter.

Annorlunda uttryckt: Om $p(x)$ är ett polynom med komplexa koefficienter av gradtal $n \geq 1$ har ekvationen $p(x) = 0$ alltid precis n stycken nollställen (räknade med multiplicitet)

Faktorisering av polynom

Vi vet nu att n :te-grads polynom med **komplexa** koefficienter alltid kan faktoriseras fullständigt till en produkt av n st. förstegradspolynom med **komplexa** koefficienter.

Annorlunda uttryckt: Om $p(x)$ är ett polynom med komplexa koefficienter av gradtal $n \geq 1$ har ekvationen $p(x) = 0$ alltid precis n stycken nollställen (räknade med multiplicitet)

Men hur ser det ut om vi begränsar oss till polynom med **reella** koefficienter och vill faktorisera dessa så långt som möjligt till en produkt av polynom med **reella** koefficienter?

Faktorisering av polynom

För andragradspolynom med reella koefficienter finns tre fall

Exempel:

I: Två reella nollställen $x^2 - x - 6$ har nollställen $x = 3$ och $x = -2$ och $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$



Faktorisering av polynom

För andragradspolynom med reella koefficienter finns tre fall

Exempel:

I: Två reella nollställen $x^2 - x - 6$ har nollställen $x = 3$ och $x = -2$ och $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

II. Ett reellt nollställe av multiplicitet två $x^2 - 4x + 4$ har en dubbelrot $x = 2$ och $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$



Faktorisering av polynom

För andragradspolynom med reella koefficienter finns tre fall

Exempel:

I: Två reella nollställen $x^2 - x - 6$ har nollställen $x = 3$ och $x = -2$ och $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

II. Ett reellt nollställe av multiplicitet två $x^2 - 4x + 4$ har en dubbelrot $x = 2$ och $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

III. Två icke-reella komplexkonjugerade nollställen
 $x^2 - 2x + 5$ har nollställen

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 5} = 1 \pm 2i \iff x = 1 + 2i \vee x = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i$$

och

$$x^2 - 2x + 5 = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$$



Faktorisering av polynom

Uppgift

Låt $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5$.

Visa att $p(1) = p(-1) = 0$.

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $p(x) = 0$.

Faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i polynom med reella koefficienter.

Faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i polynom med komplexa koefficienter.

Arimetik med komplexa tal

Exempel $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5$

Eftersom $p(1) = 0$ och $p(-1) = 0$ är
($x-1$) och ($x+1$) faktorer i $p(x)$, dvs $(x-1)(x+1) = (x^2-1)$
delar $p(x)$, Polynomdivision ger

$$p(x) = (x^2-1)(x^2-2x+5)$$

faktorisering
i pol. med
reella koef.

$$= (x+1)(x-1)(x^2-2x+5)$$

så har
reella
nollställen
enl. ovan

$$= (x+1)(x-1)(x-(1+2i))(x-(1-2i))$$

faktorisering i polynom med komplexa koef.

Faktorisering av polynom

Sats

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med $\text{grad}(p) = n \geq 1$ och $a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, n$.

Faktorisering av polynom

Sats

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med $\text{grad}(p) = n \geq 1$ och $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Då kan p skrivas som en produkt av förstgrads- och andragradspolynom med reella koefficienter, där andragradspolynomen saknar reella nollställen, dvs

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)$$

där $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, k$, $\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, m$ och $k + 2m = n$. För varje andragadsfaktor gäller att

$(x^2 + \beta_j x + \gamma_j) = ((x - (c_j + id_j))(x - (c_j - id_j)))$ där $d_j \neq 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, dvs dessa har två komplexkonjugerade nollställen

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Lemma

Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Om $z_0 = a + ib$ är ett nollställe till p så är också $\overline{z_0} = a - ib$ ett nollställe till p .

Bevis av Lemma i fallet $\text{grad}(p) = 3$

Antag att $p(z) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, där $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ och anta att $p(z_0) = 0$.

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Lemma

Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Om $z_0 = a + ib$ är ett nollställe till p så är också $\bar{z}_0 = a - ib$ ett nollställe till p .

Bevis av Lemma i fallet $\text{grad}(p) = 3$

Antag att $p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, där $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ och anta att $p(z_0) = 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_3 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{a_3 z_0^3} + \overline{a_2 z_0^2} + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \bar{a}_3 \bar{z}_0^3 + \bar{a}_2 \bar{z}_0^2 + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = \\ &= \bar{a}_3 \bar{z}_0^3 + \bar{a}_2 \bar{z}_0^2 + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = a_3 \bar{z}_0^3 + a_2 \bar{z}_0^2 + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = p(\bar{z}_0) \end{aligned}$$

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Lemma

Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Om $z_0 = a + ib$ är ett nollställe till p så är också $\bar{z}_0 = a - ib$ ett nollställe till p .

Bevis av Lemma i fallet $\text{grad}(p) = 3$

Antag att $p(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, där $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ och anta att $p(z_0) = 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_3 z_0^3 + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{a_3 z_0^3} + \overline{a_2 z_0^2} + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = \overline{a_3} \overline{z_0^3} + \overline{a_2} \overline{z_0^2} + \overline{a_1} \overline{z_0} + \overline{a_0} = \\ &= \bar{a}_3 \bar{z}_0^3 + \bar{a}_2 \bar{z}_0^2 + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_0 = a_3 \bar{z}_0^3 + a_2 \bar{z}_0^2 + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = p(\bar{z}_0) \end{aligned}$$

Vi har använt $\overline{\bar{z} + w} = \bar{\bar{z}} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ och $\bar{\bar{x}} = x$ om $x \in \mathbb{R}$.

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Låt nu $p(x)$ vara ett n :te gradspolynom med reella koefficienter,

$$p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Låt nu $p(x)$ vara ett n :te gradspolynom med reella koefficienter,

$$p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

Då finns (Alg fund sats) komplexa tal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sådana att

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Låt nu $p(x)$ vara ett n :te gradspolynom med reella koefficienter,

$$p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

Då finns (Alg fund sats) komplexa tal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sådana att

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Icke-reella nollställena måste enligt lemmat komma i form av komplexkonjugerade par. Antag t ex att $\alpha_1 = c + id$, $d \neq 0$. Då måste även $c - id$ vara ett nollställe, säg $\alpha_2 = c - id$.

Bevis av satsen om polynom med reella koefficienter

Låt nu $p(x)$ vara ett n :te gradspolynom med reella koefficienter,

$$p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

Då finns (Alg fund sats) komplexa tal $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sådana att

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Icke-reella nollställen måste enligt lemmat komma i form av komplexkonjugerade par. Antag t ex att $\alpha_1 = c + id$, $d \neq 0$. Då måste även $c - id$ vara ett nollställe, säg $\alpha_2 = c - id$. Då får vi

$$\begin{aligned} (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) &= (x - (c + id)) (x - (c - id)) \\ &= ((x - c) - id) ((x - c) + id) \\ &= ((x - c)^2 - (id)^2) = x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Satsen följer av detta

Faktorisering av polynom

Exempel

Lös ekvationen $p(x) = 0$ då $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, och man vet att $p(i) = 0$.

Faktorisering av polynom

Exempel

Lös ekvationen $p(x) = 0$ då $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, och man vet att $p(i) = 0$.

Då p har reella koefficienter är även $\bar{i} = -i$ ett nollställe, och enligt faktorsatsen är då både $(x - i)$ och $(x - (-i)) = (x + i)$ faktorer till p ,

Faktorisering av polynom

Exempel

Lös ekvationen $p(x) = 0$ då $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, och man vet att $p(i) = 0$.

Då p har reella koefficienter är även $\bar{i} = -i$ ett nollställe, och enligt faktorsatsen är då både $(x - i)$ och $(x - (-i)) = (x + i)$ faktorer till p , så

$$p(x) = (x - i)(x + i)q(x) = (x^2 + 1)q(x)$$

för något polynom q .

Faktorisering av polynom

Exempel

Lös ekvationen $p(x) = 0$ då $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, och man vet att $p(i) = 0$.

Då p har reella koefficienter är även $\bar{i} = -i$ ett nollställe, och enligt faktorsatsen är då både $(x - i)$ och $(x - (-i)) = (x + i)$ faktorer till p , så

$$p(x) = (x - i)(x + i)q(x) = (x^2 + 1)q(x)$$

för något polynom q . Polynomdivision $q(x) = p(x)/(x^2 + 1)$ ger $q(x) = x^2 + x - 2$ så

$$p(x) = (x - i)(x + i)(x^2 + x - 2)$$

Faktorisering av polynom

Alltså har $p(x) = 0$ också lösningar som är nollställena till $x^2 + x - 2$, dvs $x = 1$ eller $x = -2$. Alltså är

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x - i)(x + i)(x - 1)(x + 2) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

och $p(x) = 0 \iff x \in \{i, -i, 1, -2\}$.

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$

Metod I:

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$

Metod I: Vi ser lösningen $z = 1$, och vet då också att $(z - 1)$ är en faktor i $z^3 - 1$. Polynomdivision ger

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$

Metod I: Vi ser lösningen $z = 1$, och vet då också att $(z - 1)$ är en faktor i $z^3 - 1$. Polynomdivision ger

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

(Annat perspektiv: $z^2 + z + 1 = \{\text{geometrisk summa}\} = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$)

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$

Metod I: Vi ser lösningen $z = 1$, och vet då också att $(z - 1)$ är en faktor i $z^3 - 1$. Polynomdivision ger

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

(Annat perspektiv: $z^2 + z + 1 = \{\text{geometrisk summa}\} = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$)

Övriga lösningar fås från

$$z^2 + z + 1 = 0 \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \iff z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$.

Metod II: (fungerar för alla s k **binomiska ekvationer**
 $z^n - w = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ en konstant.)

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$.

Metod II: (fungerar för alla s k **binomiska ekvationer**

$z^n - w = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ en konstant.)

Skriv ekvationen $z^3 = 1$, och gå över till polär form.

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$.

Metod II: (fungerar för alla s k **binomiska ekvationer**

$z^n - w = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ en konstant.)

Skriv ekvationen $z^3 = 1$, och gå över till polär form.

Den obekanta z ansätts på polär form $z = re^{iv}$, r och v är obekanta.

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$.

Metod II: (fungerar för alla s k **binomiska ekvationer**

$z^n - w = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ en konstant.)

Skriv ekvationen $z^3 = 1$, och gå över till polär form.

Den obekanta z ansätts på polär form $z = re^{iv}$, r och v är obekanta. Högerled skrivs på polär form: $1 = 1 \cdot e^{0i}$.

Ekvationslösning

Exempel

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 1 = 0$.

Metod II: (fungerar för alla s k **binomiska ekvationer**

$z^n - w = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$ en konstant.)

Skriv ekvationen $z^3 = 1$, och gå över till polär form.

Den obekanta z ansätts på polär form $z = re^{iv}$, r och v är obekanta. Högerled skrivs på polär form: $1 = 1 \cdot e^{0i}$.

$$z^3 = 1 \iff (re^{iv})^3 = 1 \cdot e^{0i} \iff r^3 e^{3iv} = 1 \cdot e^{0i}$$

Två komplexa tal på polär form är lika OMM deras belopp är lika och argumentet är lika så när som på multiplar av 2π .

Ekvationslösning

Två komplexa tal på polär form är lika OMM deras belopp är lika och argumentet är lika så när som på multiplar av 2π . Alltså får vi (kom ihåg att $r = |z| \geq 0$)

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3v = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ v = \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ekvationslösning

Två komplexa tal på polär form är lika OMM deras belopp är lika och argumentet är lika så när som på multiplar av 2π . Alltså får vi (kom ihåg att $r = |z| \geq 0$)

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3v = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ v = \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

så $z = re^{iv} = e^{i\frac{2\pi}{3}n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Eftersom e^{iy} är 2π -periodisk, ger detta tre olika lösningar svarande mot t ex $n = 0, 1, 2$,

Ekvationslösning

Två komplexa tal på polär form är lika OMM deras belopp är lika och argumentet är lika så när som på multiplar av 2π . Alltså får vi (kom ihåg att $r = |z| \geq 0$)

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3v = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ v = \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

så $z = re^{iv} = e^{i\frac{2\pi}{3}n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Eftersom e^{iy} är 2π -periodisk, ger detta tre olika lösningar svarande mot t ex $n = 0, 1, 2$,

$$z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 1} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Enhetsrötter

På motsvarande sätt kan ekvationen $z^n = 1$ lösas för alla naturliga tal n . Lösningarna kallas **enhetsrötter** av ordning n .
("Rötter ur enheten" = "Rötter ur 1")
Se vidare inlämningsuppgift på detta tema.

Binomisk ekvation

Exempel

Lös ekvationen $z^2 = 1 + i$

Vi går över till polär form.

Ansätt $z = re^{iv}$, vilket ger $z^2 = (re^{iv})^2 = r^2 e^{2iv}$.

För högerledet får vi, observera att $|1 + i| = \sqrt{2}$,

$$(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Alltså får vi

$$z^2 = 1 + i \iff r^2 e^{2iv} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

och

Binomisk ekvation

$$r^2 e^{2iv} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2v = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ v = \frac{\pi}{8} + \pi n \end{cases}$$

där $n \in \mathbb{Z}$.

Det ger oss lösningar

$$z = re^{iv} = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + \pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

som antar två olika värden, t ex de som svarar mot $n = 0$ och $n = 1$,

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ och } z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

Andragradsekvation med förstgradsterm

Exempel

Lös ekvationen $z^2 - 4iz - 5 - i = 0$

Vi kvadratkompletterar vänster led för att få ekvationen på binomisk form.

$$z^2 - 4iz - 5 - i = 0 \iff (z - 2i)^2 - 1 - i = 0 \iff (z - 2i)^2 = 1 + i$$

Vi gör substitutionen $w = (z - 2i)$ och får den binomiska ekvationen

$$w^2 = 1 + i$$

som kan lösas enligt ovan och ger

$$w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ och } w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

Andragradsekvation med förstgradsterm

$$w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ och } w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

Eftersom $w = (z - 2i) \iff z = w + 2i$ ger detta två lösningar

$$\begin{aligned} z_0 &= w_0 + 2i = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} + 2i = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) + 2i \\ &= \sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\left(2 + \left(\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{2 + \sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1 + 2i = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} + 2i = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right) + 2i \\ &= \sqrt[4]{2}\cos\frac{9\pi}{8} + i\left(2 + \left(\sqrt[4]{2}\sin\frac{9\pi}{8}\right)\right) = -\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{2 - \sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$