

Föreläsning 10

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

28 september 2022

Komplexa tal

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

Varför? Vad? Hur?

Komplexa tal — historia

Lösningar till 3:e-gradsekvationer

Cardanos formel (1500-tal) Ekvationen

$$x^3 = px + q$$

har en lösning

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Komplexa tal — historia

Lösningar till 3:e-gradsekvationer

Cardanos formel (1500-tal) Ekvationen

$$x^3 = px + q$$

har en lösning

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Även för vissa naturliga tal p och q som ger en lösning $x \in \mathbb{N}$, ger formeln räkning med komplexa tal "på vägen".



Komplexa tal — historia

Lösningar till 3:e-gradsekvationer

Exempel. Med $p = 15$ och $q = 4$ fås ekvationen

$$x^3 = 15x + 4,$$

och Cardanos formel ger

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \\ &= \{\text{som kan förenklas till lösningen}\} = 4 \end{aligned}$$



Komplexa tal — tillämpningar

Ellära

$j\omega$ - metoden för beräkningar på växelströmskretsar.

Kvantmekanik

Kvantmekanikens grundekvation är den så kallade Schrödingerekvationen,

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2}$$

med lösningar $f(x, t)$, funktioner som har komplexa tal som värden och som beskriver tillståndet för ett kvantsystem.

Komplexa tal — matematiskt naturligt

Uppgift

Hitta på en polynomekvation med naturliga tal som koefficienter och som inte har något naturliga tal som lösning.

Komplexa tal — matematiskt naturligt

Uppgift

Hitta på en polynomekvation med naturliga tal som koefficienter och som inte har något naturliga tal som lösning.

Exempel: $x + 1 = 0$

Uppgift

Gör det samma för hela tal, rationella tal och reella tal.



Komplexa tal — matematiskt naturligt

Uppgift

Hitta på en polynomekvation med naturliga tal som koefficienter och som inte har något naturliga tal som lösning.

Exempel: $x + 1 = 0$

Uppgift

Gör det samma för hela tal, rationella tal och reella tal.

Exempel: $2x - 3 = 0$ (heltalskoefficienter men ingen heltalslösning)

Exempel: $x^2 - 2 = 0$ (rationella koefficienter, men lösningarna $x = \pm \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Exempel: $x^2 + 1 = 0$ (reella koefficienter, inga reella lösningar)



Komplexa tal — matematiskt naturligt

Sats

En polynomekvation med komplex tal som koefficienter har alltid komplexa lösningar.

Om ekvationen är av gradtal n finns det n stycken lösningar (räknade med multiplicitet)

Vi återkommer till detta nästa föreläsning.

Komplexa tal

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{de komplexa talen}$$

De fyra räknesätten fungerar som för reella tal
med tillägget $i^2 = -1$. Talet i kallas den **imaginära enheten**.

Komplexa tal

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{de komplexa talen}$$

De fyra räknesätten fungerar som för reella tal med tillägget $i^2 = -1$. Talet i kallas den **imaginära enheten**.

Definition

Om z är det komplexa talet $z = a + ib$ definieras

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad (\text{realdelen av } z)$$

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad (\text{imaginärdelen av } z)$$

Observera att $\operatorname{Im}(z)$ är ett reellt tal.

Om $\operatorname{Re}(z) = 0$ sägs z vara (rent) imaginärt.



Armetik med komplexa tal

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \\ = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Aritmetik med komplexa tal

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id} &\stackrel{=}{=} \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \stackrel{=}{=} \\&= \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2 - (id)^2} \Rightarrow \\&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \quad \text{(om } c+id \neq 0)\end{aligned}$$

Armetik med komplexa tal

Uppgift

Låt

$$z = \left(\frac{7}{2} + i\right) \quad \text{och} \quad w = 1 - 2i$$

Beräkna

$$z + w, \quad 2z - w, \quad zw \quad \text{och} \quad \frac{z}{w}$$

Aritmetik med komplexa tal

$$\text{Låt } Z = \left(\frac{7}{2} + i\right), \quad W = 1 - 2i$$

Beräkna

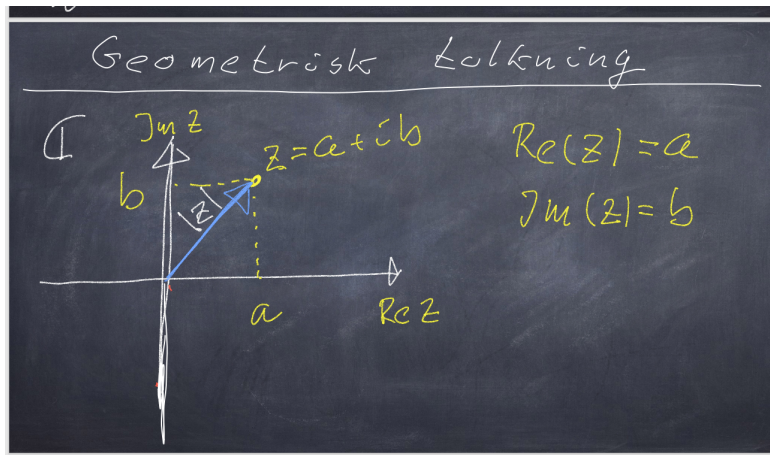
$$Z + W = \left(\frac{7}{2} + i\right) + (1 - 2i) = \left(\frac{7}{2} + 1\right) + i(1 - 2) = \frac{9}{2} - i$$

$$2Z - W = 2\left(\frac{7}{2} + i\right) - (1 - 2i) = 7 + 2i - 1 + 2i = 6 + 4i$$

$$Z \cdot W = \left(\frac{7}{2} + i\right)(1 - 2i) = \left(\frac{7}{2} \cdot 1 + i(-2i)\right) + \left(\frac{7}{2}(-2i) + (1 \cdot i)\right) =$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{\left(\frac{7}{2} + i\right)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{\left(\frac{7}{2} - 2\right) + i(7 + 1)}{1^2 + 2^2} = \frac{3}{10} + i\frac{8}{5}$$

Komplexa tal



Komplexa tal

Definitioner

För ett komplext tal $z = a + ib$ definierar vi

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{beloppet av } z)$$

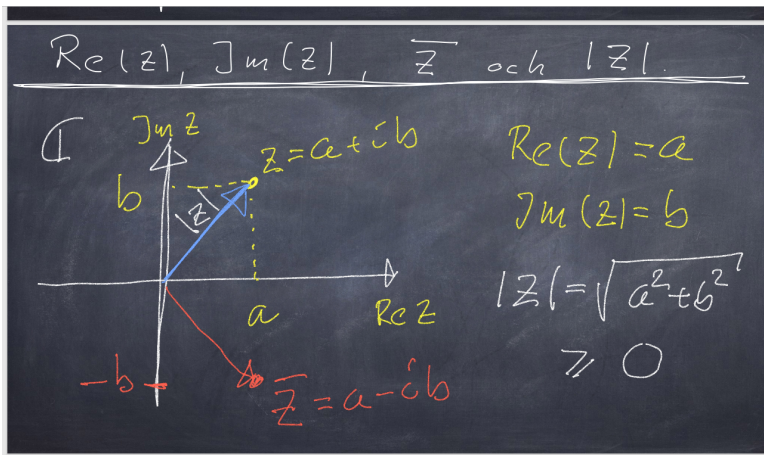
$$\bar{z} = a - ib \quad (\text{komplexkonjugatet av } z)$$

Och kom ihåg att

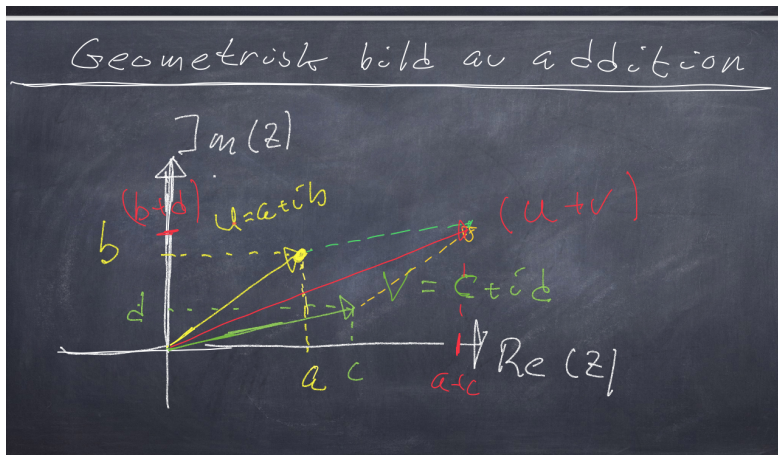
$$\operatorname{Re}(z) = a \quad (\text{realdelen av } z)$$

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad (\text{imaginärdelen av } z)$$

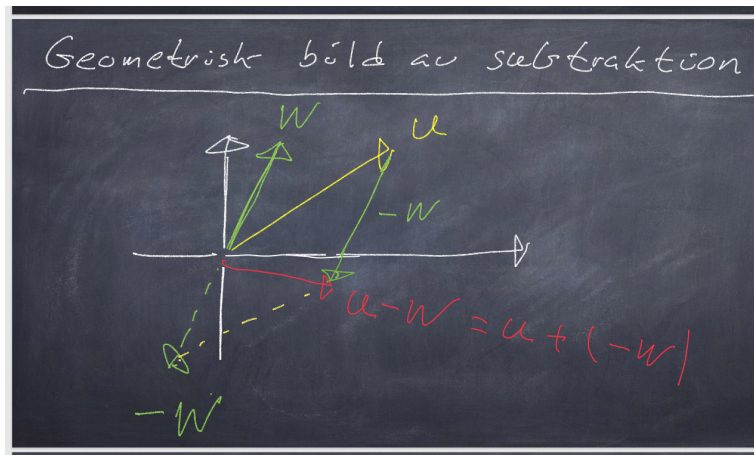
Komplexa tal



Komplexa tal



Komplexa tal



Komplexa tal

Sats - komplexkonjugatets egenskaper

Om z och w är komplexa tal gäller att

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{(zw)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad \text{om } w \neq 0$$

Komplexa tal

Beröis $\left(\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w} \right)$

Låt $z = a + ib$, $w = c + id$

V.L. $= \overline{zw} = \overline{(a+ib)(c+id)} =$

$= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = \underline{(ac - bd) - i(ad + bc)}$

H.L. $= (a - ib)(c - id) =$

$= (ac - bd) + i(-ad - bc) = \underline{(ac - bd) - i(ad + bc)}$
 $= \text{V.L.}$

Komplexa tal

Sats — absolutbeloppets egenskaper

Om z och w är komplexa tal gäller att

$$|zw| = |z| |w|$$

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \text{om } w \neq 0$$

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (\text{Triangelolikheten})$$

Komplexa tal

Beris ($|zw| = |z||w|$)

V.L. & H.L. $\in \mathbb{R}$, V.L., H.L. ≥ 0 ,

Så ekvivalent att visa $|zw|^2 = |z|^2 |w|^2$.

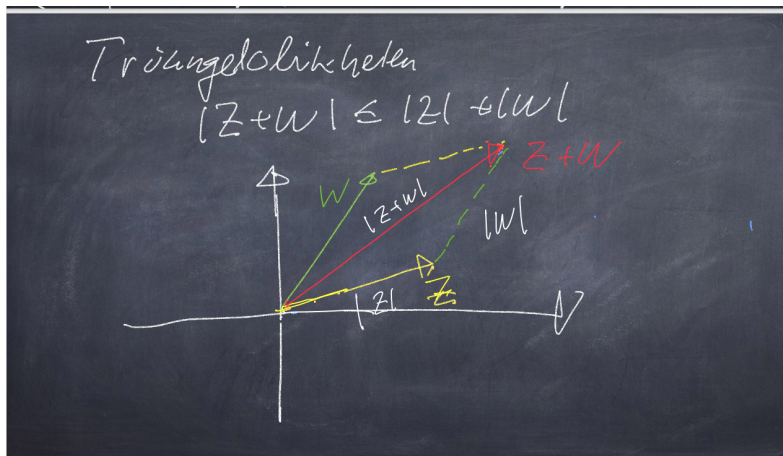
Sätt $z = a + ib$, $w = c + id$.

$$(V.L.)^2 = |z \cdot w|^2 = |(ac - bd) + i(ad + bc)|^2$$

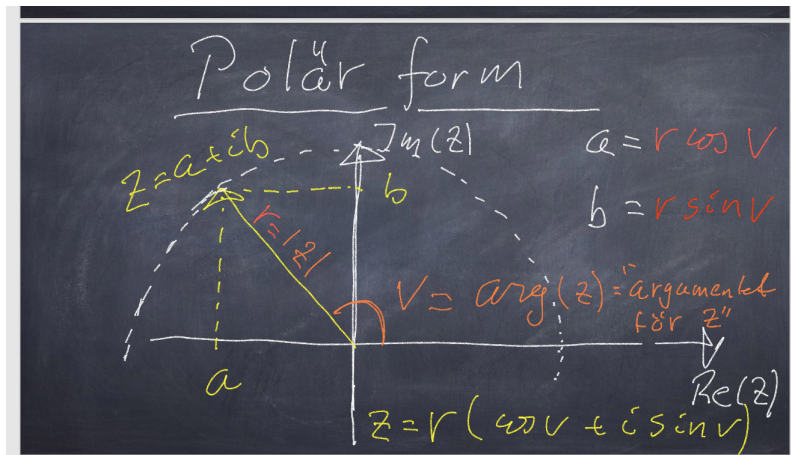
$$\Rightarrow (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \dots$$

$$(H.L.)^2 = |z|^2 |w|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \dots = (V.L.)^2$$

Komplexa tal



Komplexa tal — polär form



Komplexa tal - polär form

Polär form av komplexa tal

Ett komplext tal $z = a + ib$ kan skrivas på polär form

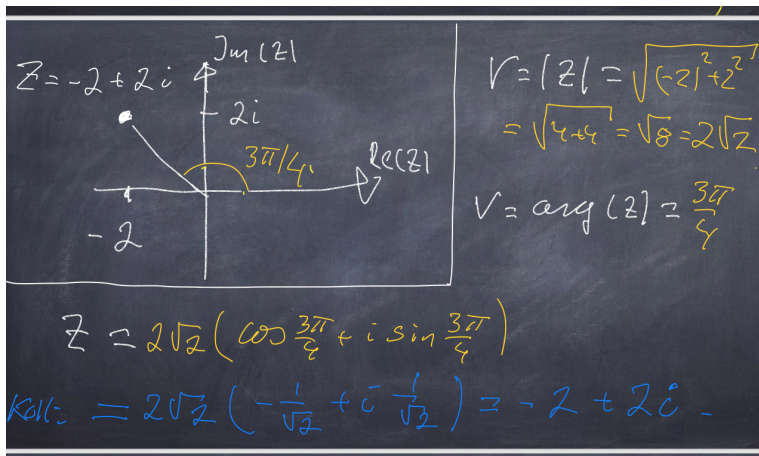
$$z = r (\cos v + i \sin v)$$

där $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ och v är en lösning till ekvationerna

$$\begin{cases} \cos v &= \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin v &= \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

v kallas ett **argument** till z , $v = \arg(z)$.

Komplexa tal



Komplexa tal

Skriv $z = \sqrt{3} + i$ på polar form.



$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

Sök nu φ s.a.
$$\begin{cases} \cos \varphi = \sqrt{3}/2 \\ \sin \varphi = 1/2 \end{cases} \quad \text{I.ex } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Alltså är } \underline{z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$$

Komplexa tal

Skriv $z = -\sqrt{3} - i$ på polär form



$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$z = -\sqrt{3} - i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

Sök φ s.a.

$$\cos \varphi = -\sqrt{3}/2$$

$$\sin \varphi = -1/2$$

Ta t.ex $\varphi = 7\pi/6$, så $z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$

Komplexa tal

Polär form & multiplikation & division

$$\text{Om } z = |z| (\cos u + i \sin u),$$

$$w = |w| (\cos v + i \sin v) \quad \text{så}$$

$$z \cdot w = |z| |w| (\cos u + i \sin u) \cdot (\cos v + i \sin v)$$

$$= |z| |w| \left(\begin{aligned} &(\cos u \cos v - \sin u \sin v) \\ &+ i (\sin v \cos u + \cos v \sin u) \end{aligned} \right)$$

Add.

$$\stackrel{\text{formeln}}{=} |z| |w| (\cos(u+v) + i \sin(u+v))$$

Komplexa tal - polär form

Multiplikation/division på polär form

Om z och w är två komplexa tal, $z = |z|(\cos u + i \sin u)$ och $w = |w|(\cos v + i \sin v)$ så är

$$zw = |z||w|(\cos(u + v) + i \sin(u + v))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(u - v) + i \sin(u - v)), \quad \text{om } w \neq 0$$

Vid multiplikation multipliceras beloppen och adderas argumenten.

Vid division divideras beloppen och subtraheras argumenten.

Komplexa tal

$$\underline{\text{Exempel}}: Z = (1+i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

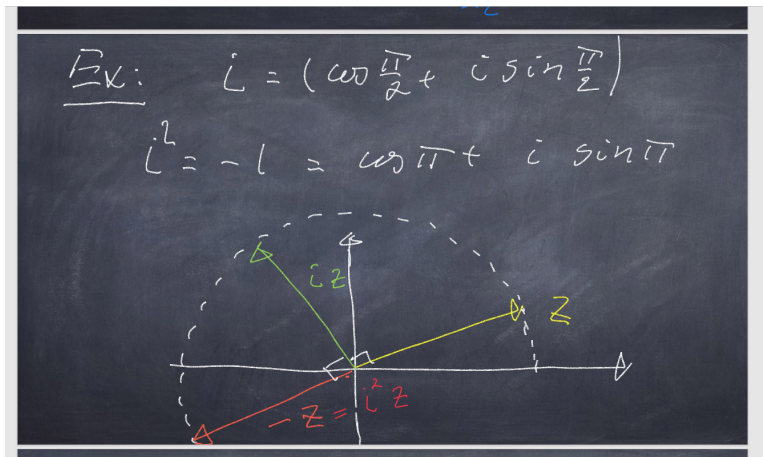
$$W = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$Z \cdot W = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 4 \left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{=0} \right) = -4$$

$$\underline{\text{Ofr}}: (1+i)(-2+2i) = (-2 + \underbrace{2i^2}_{-2}) + (2i - 2i) = \underline{\underline{-4}}$$

Komplexa tal



Komplexa tal - de Moivres formel

de Moivres formel

Om $v \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$ gäller att

$$(\cos v + i \sin v)^n = \cos nv + i \sin nv$$

Bevis: För positiva heltal kan vi visa detta med induktion över n .

Påstendet är uppenberligen sant för $n = 1$

Antag nu att det gäller för $n = k \geq 1$. För $n = k + 1$ fås då

$$\begin{aligned} (\cos v + i \sin v)^{k+1} &= (\cos v + i \sin v)^k (\cos v + i \sin v) \\ &\stackrel{\text{enligt induktionsantagandet}}{=} (\cos kv + i \sin kv) (\cos v + i \sin v) \\ &\stackrel{\text{enligt sats om mult. på polär form}}{=} (\cos(k+1)v + i \sin(k+1)v) \end{aligned}$$

Komplexa tal - de Moivres formel

de Moivres formel kan visas även för negativa heltalsexponenter.

Formeln är inte giltig om exponenten inte är ett heltal.

de Moivres formel version 2

Om $z = r(\cos v + i \sin v)$ och $n \in \mathbb{Z}$ gäller att

$$z^n = (r(\cos v + i \sin v))^n = r^n (\cos nv + i \sin nv)$$

Komplexa tal

Exempel:

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = (1+i)^{10} \cdot (1-i)^{-8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{array} \right\} =$$

$$= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{10} \cdot \left(\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \right)^{-8}$$

$$= (\sqrt{2})^{10} \cdot (\sqrt{2})^{-8} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) \left(\cos \left(+\frac{8\pi}{4}\right) + i \sin \left(+\frac{8\pi}{4}\right) \right)$$

$$= \sqrt{2}^2 \left(\cos \left(\frac{10\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{10\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{2} + i \sin \frac{2\pi}{2} \right) = 2i$$

$18/4 \pi = 4 \pi + 2/4 \pi = \pi \implies$

Komplexa tal

$$\begin{aligned} \text{L\u00e5t } E(v) &= \cos v + i \sin v \\ \text{Enligt } \text{over} \\ E(u) \cdot E(v) &= E(u+v) \\ \frac{E(u)}{E(v)} &= E(u-v) \\ [E(u)]^n &= E(n \cdot u) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Jfr!} \\ e^u \cdot e^v &= e^{u+v} \\ \frac{e^u}{e^v} &= e^{u-v} \\ (e^u)^n &= e^{nu} \end{aligned}$$

Komplexa exponentialfunktionen

För ett rent imaginärt tal iy , $y \in \mathbb{R}$, är det alltså naturligt att definiera

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

vilket leder till följande generella definition.

Definition — komplexa exponentialfunktionen

Om $z = x + iy$ definierar vi

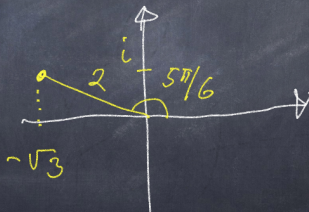
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Observera att

$$|e^{x+iy}| = e^x \quad \text{och} \quad \arg(e^{x+iy}) = y$$

Komplexa tal

$$\begin{aligned}\underline{\text{Ex.}} \quad -\sqrt{3} + i &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 2 e^{i 5\pi/6}\end{aligned}$$



Komplexa exponentialfunktioner

Sats

$$e^{x+iy} e^{u+iv} = e^{(x+u)+i(y+v)};$$

$$\frac{e^{x+iy}}{e^{u+iv}} = e^{(x-u)+i(y-v)};$$

$$(e^{x+iy})^n = e^{n(x+iy)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Komplexa tal - trigonometriska funktioner

Vi har för $x \in \mathbb{R}$ definierat $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Det följer att $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = e^{ix} = \cos x - i \sin x$

Ur detta kan vi lösa ut $\cos x$ och $\sin x$ och få (för reella x)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Detta gör det naturligt med följande definition

Komplexa trigonometriska funktioner

För ett komplext tal z definerar vi

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{och} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$