

Föreläsning 8

SF1661

HT22

21/9 - 22

Mer om Induktionsbevis

Binomialsetsen

och



Bevisa m. induction att

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$

dvs. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(1 + 2 + 3 + \dots + n \right)^2$

OBS: $= \frac{n(n+1)}{2}$

Låt $P(n)$ vara påstående

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2$$

Vi

① bevisa först att $P(1)$ sann

② bevisa sedan implikationen

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), k \in \mathbb{N}$$

Enligt Induktionsprincipen är då $P(n)$
sann för alla $n \in \mathbb{N}$

① (Induktionsbas)

$P(1)$ är påståendet

$$\sum_{j=1}^L j^3 = \left(\sum_{j=1}^L j \right)^2$$

$$V.L. = 1^3 = 1, \quad H.L. = (1)^2 = 1$$

Så $V.L. (n=1) = H.L. (n=1)$ & $P(1)$ sann

II (Induktionssatz)

Antag att $P(k)$ är sann,
för något tal $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

dvs. anta
$$\sum_{j=1}^k j^3 = \left(\sum_{j=1}^k j \right)^2 \quad (*)$$

Induktionssteg

(Vi vill nu visa att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
dus vi vill visa att om (*) gäller,
så är

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{k+1} j \right)^2$$

$$V.L.(n=k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} j^3 \Rightarrow \sum_{j=1}^k j^3 + (k+1)^3 =$$

endl

$$= \left(\sum_{j=1}^k j \right)^2 + (k+1)^3 \stackrel{\text{arithmetisch}}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3$$

(*)

$$\Rightarrow \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$S_a^c \quad V.L. (n=k+1) = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

$$H.L. (n=k+1) = \left(\sum_{j=1}^{k+1} j \right)^2$$

$$\begin{aligned} &\text{Arithmetische} \\ &= \text{Summe} \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 = V.L. (n=k+1) \end{aligned}$$

vi har visat

(I) $P(1)$ är sant

(II) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$

Enligt INDUKTIONSPRINCIPEN

är då $P(n)$ sant för alla

$n \in \mathbb{N}$

Visa med induction att

$$2^n > n^2 \text{ för alla } n \geq 5$$

• Für $n=5$

$$2^5 = 32 \rightarrow 25 = 5^2 \text{ (Induktionsbasis)}$$

• Für $n=5$ $2^5 = 32 > 2$ $5^5 = 3125 > 5^2$

• Aufg neu abt $2^k > k^2$ für negot $k \geq 5$.
 (Induktionsanfang)

• För $n=5$ $2^5 = 32 > 2$ $5^2 = 25$

• Antag nu att $2^k > k^2$ för något $k \geq 5$.

• Då är $2^{k+1} = 2 \cdot \underline{2^k} > 2 \cdot \underline{k^2} \xrightarrow{(*)} (k+1)^2$

Enligt
induktionsantagandet

Visas nedan

Bonus (*) : • Låt $p(k) = 2k^2 - (k+1)^2$
• Vi vill visa att $p(k) > 0$ för $k \geq 5$

$$\begin{aligned} p(k) &= 2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 \\ &= k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2. \end{aligned}$$

Detta är ett 2:a grads polynom med
nollställena $k = 1 \pm \sqrt{2}$. Från grafen
ser vi att
 $p(k) > 0$
för $k \geq 5$.



Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart
med 4 för alla heltal $n \geq 0$. $(P(n))$

Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart
med 4 för alla heltal $n \geq 0$. ($P(n)$)

Induktionsbas: För $n=0$ gäller
 $3 \cdot 9^0 + 25^0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, så $P(0)$ sant.

Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart
med 4 för alla hela tal $n \geq 0$. ($P(n)$)

Induktionsbas: För $n=0$ gäller
 $3 \cdot 9^0 + 25^0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, så $P(0)$ sant.

Induktionsantagande: Antag nu att $P(k)$

är sant, dvs. antag att $3 \cdot 9^k + 25^k = 4m$

för något $m \in \mathbb{N}$, där $k \geq 0$.

För $n = k+1$ för u då

$$3 \cdot 9^{k+1} + 25^{k+1} = 9(3 \cdot 9^k) + 25(25^k)$$

$$= 9(3 \cdot 9^k + 25^k) + 16 \cdot 25^k$$

$$\stackrel{\text{ind}}{=} 9 \cdot 4m + 16 \cdot 25^k = 4(9m + 4 \cdot 25^k)$$

Induktions
antagandet

så

$P(k+1)$ är sant

om

$P(k)$ är sant.

helhet
delbart m. 4.

Alltså: om $P(n)$ är påståendet

"4 delar $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ " så

kan vi visa

$\left\{ \begin{array}{l} P(0) \text{ sant} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 0 \end{array} \right.$

så $P(n)$ sant $\forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$

enligt induktionsprincipen.

Binomialsatzen

2 Pascals triangle

$$(x+y)^1 = x + y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = \dots$$

⋮

$$(x+y)^n = \dots$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

?

?

För att formulera detta
behöver vi
definiera

$n!$

och

$\binom{n}{k}$

"Fakultet"

"Binomial
-koefficienter"

Fakultet

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exempel:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (3!) \cdot 4 = 24$$

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Rekursiv formel

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$n \geq 1$$

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k! (n-k)!}, \quad n \geq k \geq 0$$

"n över k" "n choose k"

Exempel: $\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! (2-0)!} = \frac{2!}{0! 2!} = \frac{2}{1 \cdot 2} = 1$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!} = 15$$

Berechnung:

$$\bullet \quad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ = 120$$

$$\bullet \quad \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 30$$

$$\bullet \quad \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$\bullet \quad \binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$$

$$\bullet \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

$$\bullet \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 6$$

$$\bullet \quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$$\bullet \quad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$$

Binomial satzen :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0$$

Example:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} x^{2-k} y^k = \\&= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 \\&= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^{3-k} y^k = \\&= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 \\&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

$$(x+2y)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} x^{4-k} (2y)^k$$

$$= \binom{4}{0} x^4 (2y)^0 + \binom{4}{1} x^3 (2y)^1 + \binom{4}{2} x^2 (2y)^2 + \binom{4}{3} x^1 (2y)^3 + \binom{4}{4} x^0 (2y)^4$$

$$= x^4 + 4x^3 \cdot 2y + 6x^2 \cdot 4y^2 + 4x \cdot 8y^3 + 16y^4$$

$$= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$$

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom
i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^8 a_k x^k.$$

Bestäm a_5 .

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom
i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^8 a_k x^k.$$

Bestäm a_5 .

$$p(x) = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^{8-k} (-2)^k.$$

*Binom
satsen*

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom
i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^8 a_k x^k$$

Bestäm a_5 .

$$p(x) = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^{8-k} (-2)^k$$

$k=3$ ger termen $\binom{8}{3} x^5 (-2)^3 = (-8) \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^5$

$$= -8^2 \cdot 7 x^5 = -7 \cdot 64 x^5 = \underline{\underline{-448 x^5}} \\ = a_5$$

Lemma (Binomialkoeffizientenvernas eghenstora)

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\bullet \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Egenskaper

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\bullet \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1$$

$$\binom{2}{1} = 2$$

$$\binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1$$

$$\binom{4}{1} = 4$$

$$\binom{4}{2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

$$\binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

Bevis: $\binom{n}{k}$ egeus Lapar

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! (n-n)!} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot k}{k \cdot (k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot k}{k \cdot (k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)}$$

$$= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Bevis av binomialsatsen

- görs med induktion över n
- principen i induktionen visas nedan i specifallet

$$n=2 \quad \text{z} \quad n=3.$$

- bygger på egenskaper hos $\binom{n}{k}$ enligt Lemma ovan.

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y) \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 (x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y) \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right) \\
 &= x \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right) \\
 &\quad + y \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y) \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right)$$

$$= x \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right)$$

$$+ y \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right)$$

$$= \binom{2}{0}x^3 + \binom{2}{1}x^2y + \binom{2}{2}xy^2$$

$$+ \binom{2}{0}x^2y + \binom{2}{1}xy^2 + \binom{2}{2}y^3$$

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y) \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right) \\
&= x \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right) \\
&\quad + y \left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2 \right) \\
&= \binom{2}{0}x^3 + \binom{2}{1}x^2y + \binom{2}{2}xy^2 \\
&\quad + \binom{2}{0}x^2y + \binom{2}{1}xy^2 + \binom{2}{2}y^3 \\
&= \underbrace{\binom{2}{0}x^3}_{=1=\binom{3}{0}} + \underbrace{\left(\binom{2}{0} + \binom{2}{1} \right) x^2y}_{=\binom{3}{1}} + \underbrace{\left(\binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right) xy^2}_{=\binom{3}{2}} + \underbrace{\binom{2}{2}y^3}_{=1=\binom{3}{3}}
\end{aligned}$$

Bevis för Binomialsatsen

Vi bevisar satsen genom induktion. Vi börjar med att fastställa induktionsbasen för några värden på n . Det skulle dock egentligen räcka med fallet $n = 0$.

Fallet $n = 0$. I detta fall säger satsen att

$$(a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

vilket ju stämmer bra.

Fallet $n = 1$. I detta fall säger satsen att

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \\ &= \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 \\ &= 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b \\ &= a + b, \end{aligned}$$

vilket ju även det stämmer bra.

Vi genomför nu induktionssteget. Därför antar vi att satsen stämmer för $n = m$, nämligen att

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

och visar att detta medför att satsen även stämmer för $n = m + 1$, nämligen att

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k.$$

Vi beräknar:

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (a + b)(a + b)^m = (a + b) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k}_{\text{Genom induktionsantagandet}} \\ &= a \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

Nästa steg är att slå ihop de två summorna. För att göra detta parar vi ihop termer som har samma potenser av a och b . För att matcha termen

Nästa steg är att slå ihop de två summorna. För att göra detta parar vi ihop termer som har samma potenser av a och b . För att matcha termen

$$\binom{m}{k-1} a^{m-(k-1)} b^{(k-1)+1} = \binom{m}{k-1} a^{m-k+1} b^k$$

i den högra summan måste vi ta termen

$$\binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k$$

i den vänstra summan. Termen

$$\binom{m}{0} a^{m-0+1} b^0 = a^{m+1}$$

i den vänstra summan har ingen motsvarighet i den högra summan, och termen

$$\binom{m}{m} a^{m-m} b^{m+1} = b^{m+1}$$

i den högra summan har ingen motsvarighet i den vänstra summan, så vi lyfter ut dessa termer.

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{m}{0} a^{m-0+1} b^0 + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] a^{m-k+1} b^k \\
&\qquad\qquad\qquad + \binom{m}{m} a^{m-m} b^{m+1} \\
&= \binom{m}{0} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1}
\end{aligned}$$

I det sista steget tillämpade vi Lemma 4.2.5. Eftersom

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1 \text{ och } \binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m} = 1$$

kan vi skriva detta som

$$\begin{aligned}
&\binom{m+1}{0} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k + \binom{m+1}{m+1} a^0 b^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k,
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.