

Föreläsning 7

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

15 september 2022

Summor, summasymbolen

$$\sum_{k=1}^N a_k$$

Speciellt

- aritmetiska summor
- geometriska summor

Induktionsbevis (forts Föreläsning 8)

Summanotation

Exempel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^9 k \cdot 10^k \\&= 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 \dots + 9 \cdot 10^9 \\&= 987654321\end{aligned}$$

Summanotation

Handwritten notes on a chalkboard explaining summation notation:

- Upper summation limit: 9 (labeled "övre summationsgräns")
- Summation symbol: $\sum$ (labeled "summasymbol ('stora sigma')")
- Term: $k \cdot 10^k$ (labeled "term")
- Lower summation limit: $k=1$ (labeled "nedre summationsgräns")
- Summation index: k (labeled "summationsindex")
- Summation description: "Summan av $k \cdot 10^k$ när k löper från 1 till 9"

Summanotation — fler exempel

$$\sum_{j=2}^{10} j^2 = 2^2 + 3^2 + \dots 10^2$$

$$\sum_{m=-3}^3 2^m = 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$

$$\sum_{i=0}^5 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Summanotation

Uppgift

Skriv ut termerna i följande summor:

$$\sum_{k=0}^4 (2k + 2)$$

$$\sum_{j=1}^5 2^j$$

$$\sum_{l=-1}^3 (2l + 4)$$

$$2 \sum_{m=0}^4 (m + 1)$$

Summanotation

$$\sum_{k=0}^4 (2k+2) = (2 \cdot 0 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (2 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 3 + 2) + (2 \cdot 4 + 2) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$\sum_{j=1}^5 2j = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$\sum_{l=-1}^3 (2l+4) = (-2+4) + (0+4) + (2+4) + (4+4) + (6+4) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$2 \sum_{n=0}^4 (n+1) = 2(1+1) + 2(2+1) + 2(3+1) + 2(4+1) + 2(5+1) = 2(1+2+3+4+5) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

Summanotation

Varje kan summa kan skrivas på (oändligt) många olika sätt genom att variera indexeringen.

Till exempel är enligt ovan

$$\sum_{k=0}^4 (2k + 2) = \sum_{j=1}^5 2j = \sum_{l=-1}^3 (2l + 4) = 2 \sum_{m=0}^4 (m + 1) \quad (= 30)$$

Summanotation

Exempel

Ändra indexeringen i summan

$$S = \sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1)$$

så att indexeringen börjar på 0, dvs. skriv S på formen

$$S = \sum_{j=0} a_j$$

Summanotation

Skriv $S = \sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1)$ på formen $S = \sum_{j=0} a_j$

Vi tar först k som nytt index, där $k = j - 1$ så att
 $k = 0 \iff j = 1$.

Summanotation

Skriv $S = \sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1)$ på formen $S = \sum_{j=0} a_j$

Vi tar först k som nytt index, där $k = j - 1$ så att $k = 0 \iff j = 1$. Då är $j = k + 1$, och k går från 0 till 9 då j går från 1 till 10. Vi får

$$\sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1) = \sum_{k=0}^9 2^{k+1}(k+2)$$

Summanotation

Skriv $S = \sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1)$ på formen $S = \sum_{j=0} a_j$

Vi tar först k som nytt index, där $k = j - 1$ så att $k = 0 \iff j = 1$. Då är $j = k + 1$, och k går från 0 till 9 då j går från 1 till 10. Vi får

$$\sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1) = \sum_{k=0}^9 2^{k+1}(k+2)$$

Vi kan nu byta namn på indexet tillbaka till j igen om vi vill, och får då

$$\sum_{j=1}^{10} 2^j(j+1) = \sum_{k=0}^9 2^{k+1}(k+2) = \sum_{j=0}^9 2^{j+1}(j+2)$$

Summor

Sats

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=m}^n a_k - \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k - b_k)$$

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n ca_k$$

Summor

Uppgift

Förenkla

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100$$

Summanotation

Föreläsa:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100 = \left. \begin{array}{l} j = k+1 \\ \text{andra summation} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{j=1}^{100} (j-1) - 100 =$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{100} (k-1) - \sum_{k=1}^{100} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{100} (k^2 - 2k + 2 - 1) = \sum_{k=1}^{100} (k-1)^2 = \sum_{m=0}^{99} m^2 = \sum_{m=1}^{99} m^2$$

$m = k-1$

Aritmetiska summor

Aritmetiska summor

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = ?$$
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$
$$+ S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ st}}$$

s_2

$$2S = 100 \cdot 101 \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{100 \cdot 101}{2} = \underline{\underline{5050}}$$

Aritmetiska summor

Definition

En summa $\sum_{k=m}^n a_k$ kallas en **aritmetisk summa** om differensen mellan två på varandra följande termer är konstant, dvs om det finns ett tal d sådant att

$$a_{k+1} - a_k = d, \forall k \in \{m, m+1, m+1, \dots, n-1\}.$$

Det betyder alltså att

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + (a_m + d) + (a_m + 2d) + \dots + (a_m + (n-m)d)$$

Aritmetiska summor

Exempel

$$8 + 11 + 14 + 17 + 20 = \{\text{aritmetisk med differens } d = 3\}$$

$$= \sum_{k=0}^4 (8 + 3k)$$

Aritmetiska summor

Exempel

Beräkna summan

$$S = \sum_{k=2}^{20} (4k + 1)$$

Aritmetiska summor

Ex. Beräkna $S = \sum_{k=2}^{20} (4k+1)$ Aritmetisk
diffrens = 4

$$S = 9 + 13 + 17 + \dots + 77 + 81$$
$$+ S = 81 + 77 + 73 + \dots + 13 + 9$$

$$2S = 90 + 90 + 90 + \dots + 90 + 90$$

19 termer

$$2S = 19 \cdot 90 \Rightarrow S = \frac{19 \cdot 90}{2} = 19 \cdot 45 = \dots$$

Aritmetiska summor

Uppgift

Beräkna summan

$$S = \sum_{k=0}^7 (3k + 2)$$

Aritmetiska summor

Uppgift: Beräkna summan

$$S = \sum_{k=0}^7 (3k+2) = 2 + 5 + 8 + \dots + 23$$

$$S = 2 + 5 + \dots + 23$$

$$S = 23 + 20 + \dots + 2$$

$$2S = \underbrace{25 + 25 + \dots + 25}_{8 \text{ st}}$$

$$2S = 8 \cdot 25 \quad \Rightarrow \quad S = 4 \cdot 25 = 100$$

Aritmetiska summor

Sats

Om

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (a_0 + kb)$$

är en aritmetisk summa med N st termer, första term a_0 och sista term a_{N-1} så är

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{N-1} (a_0 + kb) = N \frac{a_0 + a_{N-1}}{2} \\ &= (\text{antal termer}) \cdot (\text{medelvärde av första och sista termen}) \end{aligned}$$

Aritmetiska summor

Beweis

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} kb + a_0 = \left\{ M = N-1 \right\} = \sum_{k=0}^M kb + a_0$$
$$S = a_0 + (b + a_0) + (2b + a_0) + \dots + (Mb + a_0)$$
$$\text{+ } S = (Mb + a_0) + ((M-1)b + a_0) + ((M-2)b + a_0) + \dots + a_0$$

$$2S = \underbrace{(Mb + 2a_0) + (Mb + 2a_0) + \dots + (Mb + 2a_0)}_{M+1 = N \text{ st.}}$$

Aritmetiska summor

$$2S = (Mb + 2a_0) \cdot N$$

$$S = \frac{a_0 + (a_0 + Mb)}{2} \cdot N$$

$$= \frac{a_0 + (a_0 + (N-1)b)}{2} \cdot N$$

$$= N \cdot \frac{a_0 + a_{N-1}}{2} \quad \text{V.S.B.}$$

Aritmetiska summor

Example

$$\sum_{n=1}^{500\,000} 2n = (2 + 4 + \dots + 1\,000\,000)$$
$$= 500\,000 \cdot \frac{2 + 1\,000\,000}{2} = 500\,000 \cdot 500\,001$$
$$= 250\,000\,500\,000$$

Geometriska summor

Definition

En summa $\sum_{k=m}^n a_k$ kallas en **geometrisk summa** om kvoten mellan två på varandra följande termer är konstant, dvs om det finns ett tal q sådant att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q, \forall k \in \{m, m+1, m+1, \dots, n-1\}.$$

Det betyder alltså att

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_m q + a_m q^2 + \dots + a_m q^{n-m}$$

Geometriska summor

Exempel. Skriv utan summatecken och ange kvoten q

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} =$$

$$\sum_{k=1}^{10} 5 \cdot 10^{k-1} =$$

$$\sum_{l=0}^{20} (-1)^l =$$

$$\sum_{k=1}^{100} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^k =$$



Geometrisk summor

Exempel

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16, q = 2.$$

$$\sum_{k=1}^{10} 5 \cdot 10^{k-1} = 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + \dots + 5 \cdot 10^9, q = 10$$

$$\sum_{l=0}^{20} (-1)^l = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{20}, q = -1$$

$$\sum_{k=1}^{100} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^{100}, q = 1/3$$



Att summera geometriska summor

Att beräkna en geometrisk summa. Ex:

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Summan är geometrisk
med kvot $q = 1/3$.

$$S = \frac{4}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{99}} + \frac{4}{3^{100}}$$

$$\frac{1}{3} S = \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{100}} + \frac{4}{3^{101}}$$

$$S - \frac{1}{3} S = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^{101}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} S = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) \Leftrightarrow S = 2 \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)$$

Att summera geometriska summor

Uppgift

Beräkna summan

$$S = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^n}$$

Att summera geometriska summor

Uppgift: Beräkna $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $q = 1/2$

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \dots + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^9} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$$

$$-\frac{1}{2}S = \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \dots + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Geometriska summor

Sats

Om $S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k$ är en geometrisk summa med N st termer, första term a_0 och kvot $q \neq 1$ så är

$$\begin{aligned} S &= a_0 \frac{1 - q^N}{1 - q} \\ &= (\text{första term}) \cdot \frac{1 - (\text{kvoten})^{\text{antal termer}}}{1 - (\text{kvoten})} \end{aligned}$$

Om $q = 1$ är $S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 1^k = Na_0$

Att summera geometriska summor

Beris
(fallet $q \neq 1$)

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^{N-2} + a_0 q^{N-1}$$
$$= qS = a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^{N-1} + a_0 q^N$$

$$S - qS = a_0 - a_0 q^N$$
$$S(1-q) = a_0(1-q^N)$$
$$\Rightarrow S = a_0 \frac{1-q^N}{1-q}$$

Att summera geometriska summor

Speciellt gäller

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

(Minnesstöd/kontroll):

$$\begin{aligned} & (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})(1 - r) \\ &= (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) - r(1 + r + \dots + r^{n-1}) \\ &= \cancel{1} + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^{n-1}} - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \dots - \cancel{r^{n-1}} - r^n = 1 - r^n \end{aligned}$$

Induktionsbevis

Introduktion till **Induktionsbevis** - forsättning följer nästa föreläsning

Induktionsbevis

Induktionsbevis är en bevismetod för att bevis en utsaga $P(n)$ som beror av ett heltal n , och som skall bevisas vara sann för alla heltal n större än något visst N_0 .

Induktionsbevis

Induktionsbevis är en bevismetod för att bevis en utsaga $P(n)$ som beror av ett heltal n , och som skall bevisas vara sann för alla heltal n större än något visst N_0 .

Exempel på påståenden lämpliga att visa med induktion:

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2, \forall n \geq 1$
- $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart med 4 för alla heltal $n \geq 0$
- $2^n > n^2$ för alla heltal $n \geq 5$

Induktionsbevis

Princip

För att visa att ett påsåtende $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq N_0$:

I. Bevisa att $P(N_0)$ är sant . (Induktionsbasen)

Induktionsbevis

Princip

För att visa att ett påsåtende $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq N_0$:

I. Bevisa att $P(N_0)$ är sant . (Induktionsbasen)

II. Bevisa implikationen

$$P(k) \implies P(k + 1), \quad \forall k \geq N_0,$$

dvs visa att OM påståendet är sant för något $n = k$ SÅ är det i så fall också sant för nästa n , $n = k + 1$. (Induktionssteget)

Induktionsbevis

Princip

Vi har nu visat

I. $P(N_0)$ är sant

II. $P(k) \implies P(k + 1), \quad \forall k \geq N_0$

Alltså är

— $P(N_0)$ sant (enligt I)

— Eftersom $P(N_0)$ är sant ger nu II att $P(N_0 + 1)$ är sant

— Eftersom $P(N_0 + 1)$ är sant ger nu II att $P(N_0 + 2)$ är sant

Enligt **induktionsprincipen** är då $P(n)$ sant för alla heltal $n \geq N_0$

Induktionsbevis

Ve visar $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

$P(n)$

(I) För $n=1$ gäller att

Induktions
bas $V.L. = \sum_{j=1}^1 j = 1$

$H.L. = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

Slutsats: $P(1)$ är sann

Induktionsbevis

(II) Vi ska nu visa implikationen
induktions
steg $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \geq 1$,
dvs vi ska visa att

OM $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$, för något $k \geq 1$

SÅ är också $\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Induktionsbevis

Antag att $P(k)$ är sant, dvs

antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

Induktionsbevis

Antag att $P(k)$ är sant, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

• Då gäller för $n=k+1$ att

$$\underline{\underline{V.L. (n=k+1)}} = \sum_{j=1}^{k+1} j \stackrel{\substack{\text{Omskrivning} \\ \text{för att} \\ \text{ kunna använda (1)}}}{=} \sum_{j=1}^k j + (k+1) \stackrel{\substack{\text{Enligt} \\ (*)}}{=}$$

$$\underline{\underline{H.L. (n=k+1)}} =$$

Induktions-
steg

Induktionsbevis

Antag att $P(k)$ är sant, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

• Då gäller för $n=k+1$ att

$$\begin{aligned} \text{V.L. (n=k+1)} &= \sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^k j + (k+1) \stackrel{\text{Enligt (*)}}{=} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \stackrel{\text{förenklings}}{=} \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

I.H.L. (n=k+1) =

Induktions-
steg

Induktionsbevis

Antag att $P(k)$ är sant, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

Då gäller för $n=k+1$ att

V.L. ($n=k+1$) $= \sum_{j=1}^{k+1} j$ omskriv k för k längd $\sum_{j=1}^k j + (k+1)$ Enligt (*)
 $= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ $\stackrel{\text{förenkling}}{=} \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

I.L. ($n=k+1$) $= \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \text{V.L. ($n=k+1$)}$

Induktionssteg

Induktionsbevis

Vi har i induktionssteget visat att
 $V.L.(n=k) = H.L.(n=k) \Rightarrow V.L.(n=k+1) = H.L.(n=k+1)$
dvs att
implikationen $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ är sann

Alltså: $P(1)$ sann
— $P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 1$, sann $\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(n)$ sann alla $n \geq 1$