

Föreläsning 6

SF1661 HT 21 22

~~15/9 - 21~~

14/9 - 22

Absolutgelepp

- Definition 2 Eigenschaften

t.ex $|x + y| \leq |x| + |y|$

- Equationslösnig

t.ex $|x + 2| = |2x - 1|$

- Lösnig av olikheter

t.ex $|x^2 - 2x + 4| < 1$

$$1 \quad 3 \quad 1 \quad = \quad 3$$

$$1 \quad - \quad 7 \quad 1 \quad = \quad 7$$

Definition

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

= "x is arstånd $\in$ all origo"

$$|3| = \{ 3 \geq 0 \} = 3$$

$$|-7| = \{ -7 < 0 \} = -(-7) = 7$$

Lös ekvationen

$$|x| = c$$

för alla olika värden på c .

$$c < 0$$

lösning
saknas

$$c = 0$$

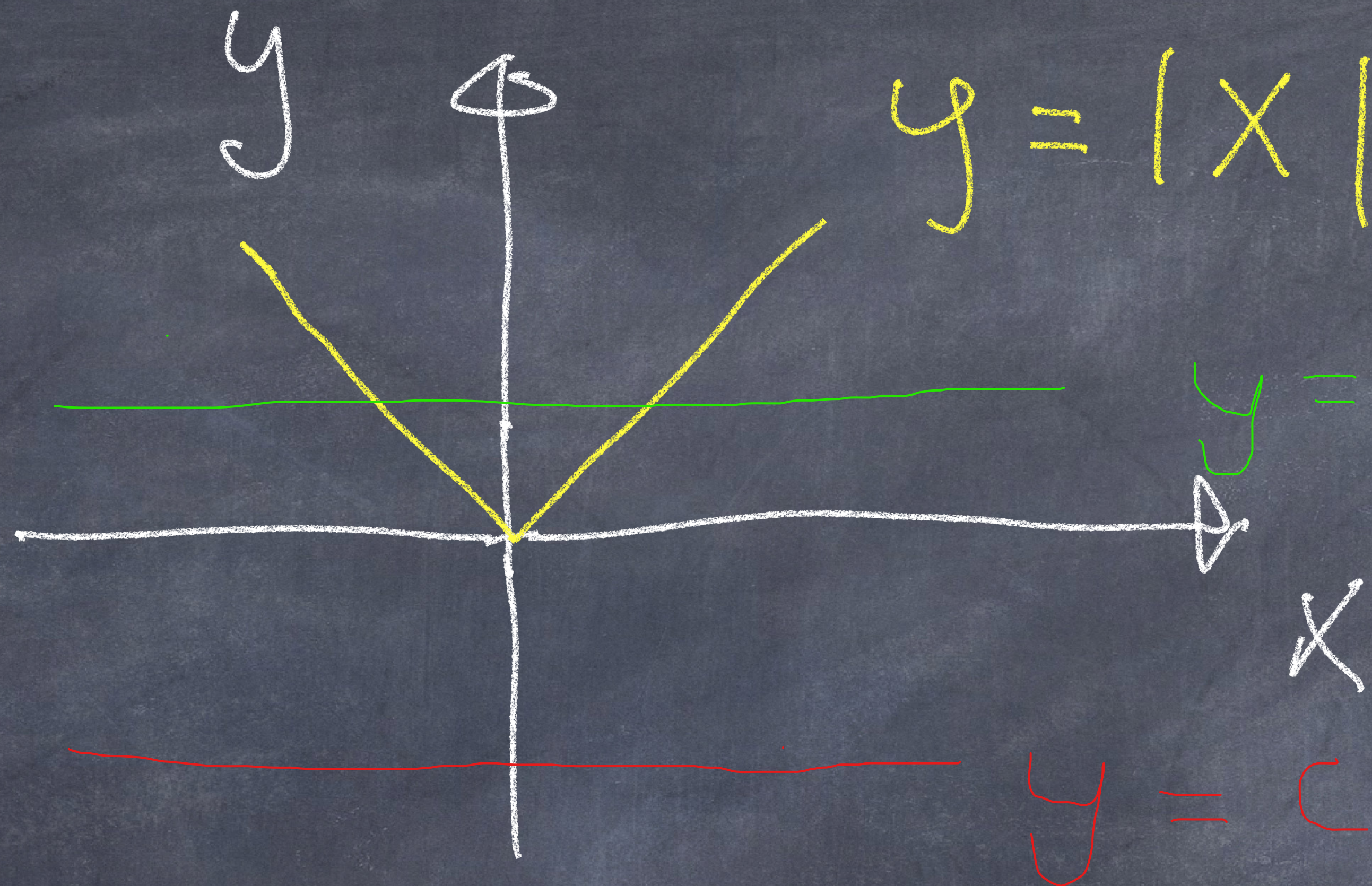
$$x = 0$$

$$c > 0$$

$$x = c$$

eller

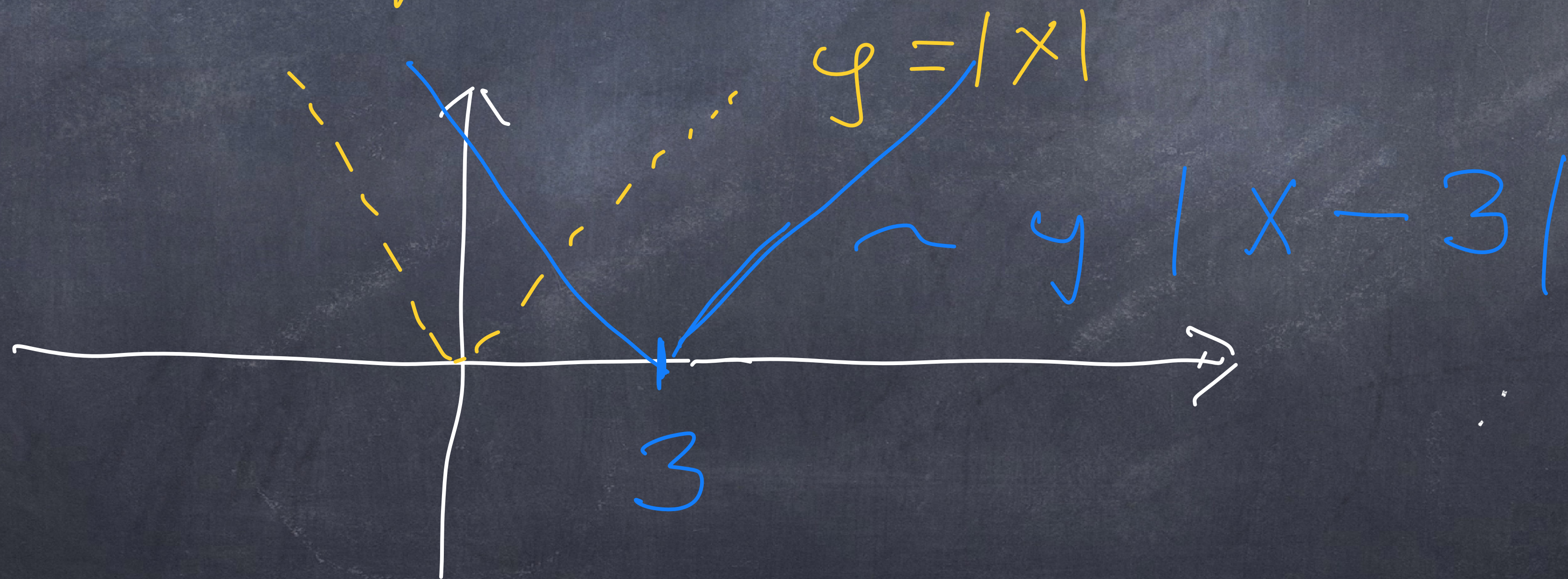
$$x = -c$$



$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Uppgift: Skissera grafen $y = |x - 3|$

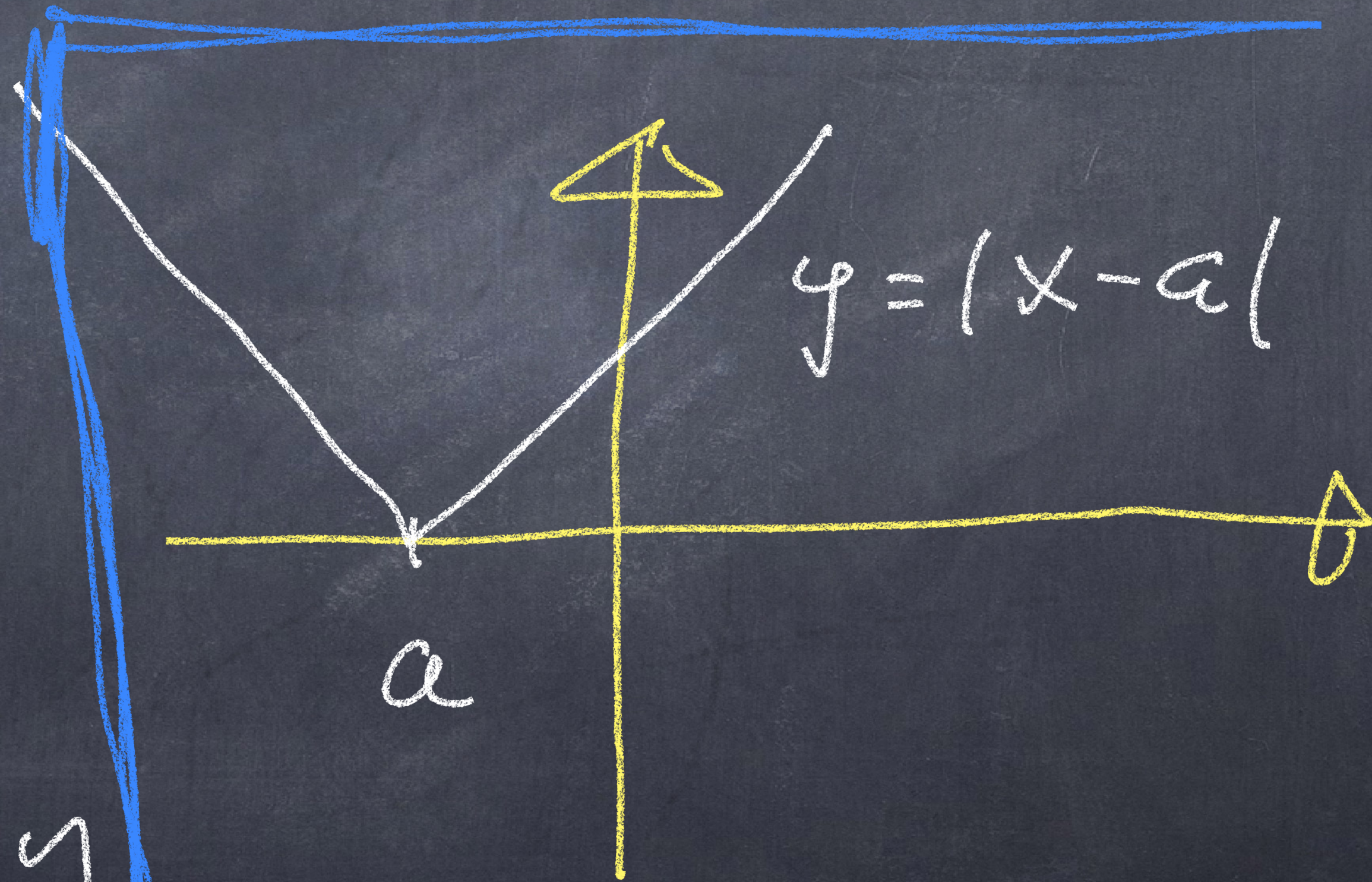
grafen $y = f(x - a)$ fås från
grafen $y = f(x)$ genom att skifte
den a steg till höger



$$|x-a| \stackrel{\text{enl}}{=} \stackrel{\text{def.}}{\text{av}} \begin{cases} (x-a), & (x-a) \geq 0 \\ -(x-a), & (x-a) < 0 \end{cases}$$

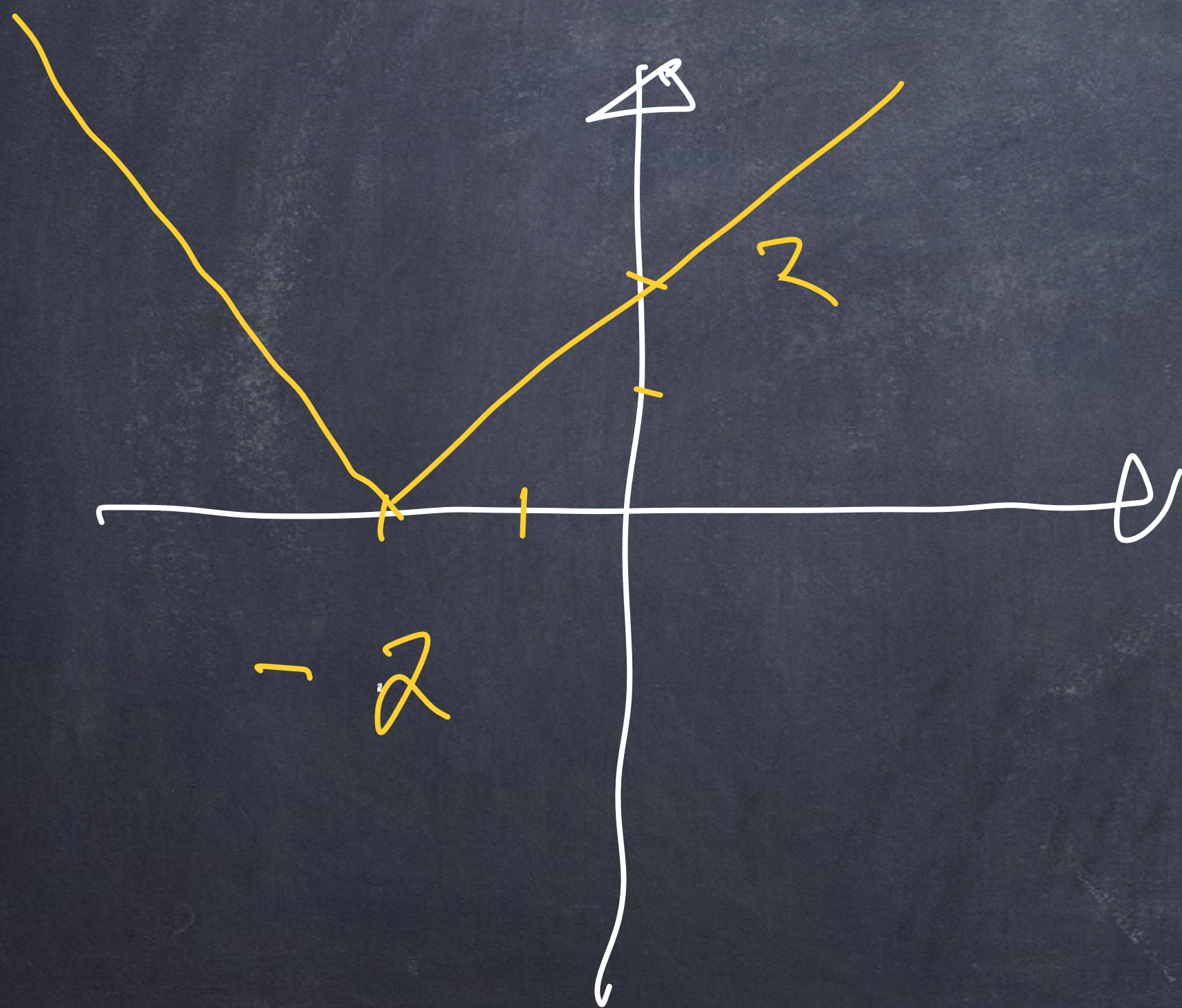
$$= \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ a-x, & x < a \end{cases}$$

= "avståndet mellan
a och x"



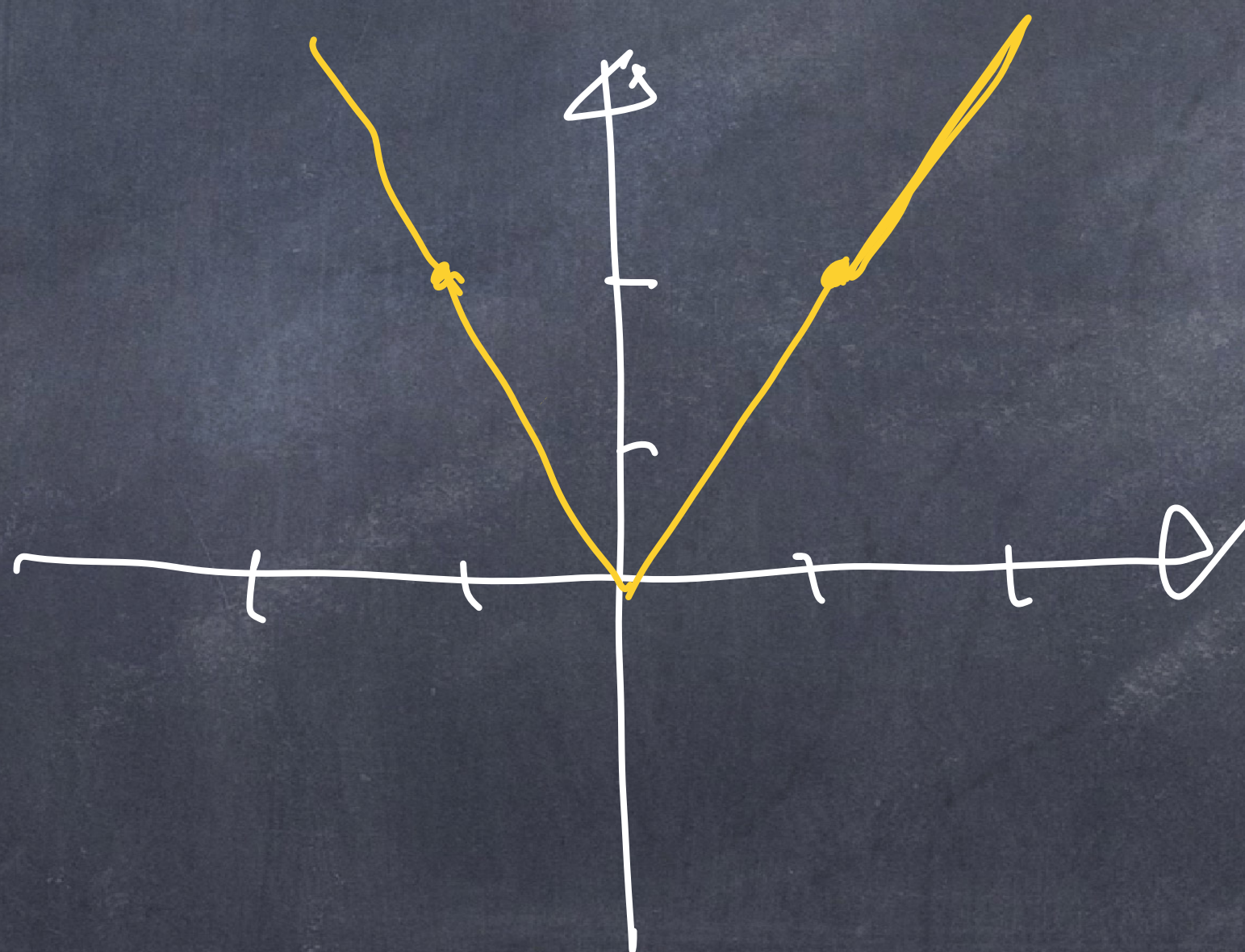
$$y = |x+2|$$

$$= \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$$



$$y = |2x|$$

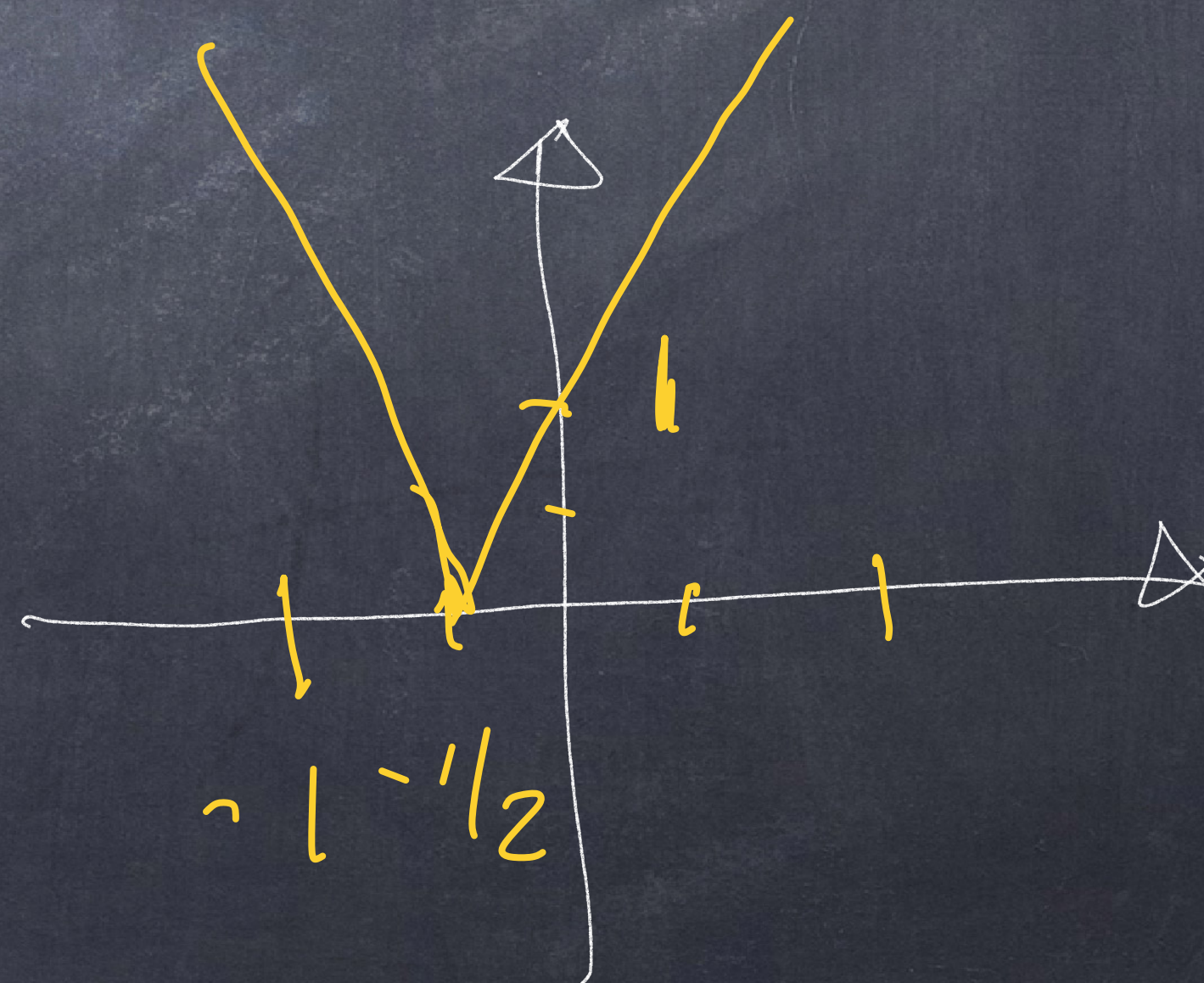
$$= \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y = |2x-1|$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \geq 0 \\ -2x+1, & 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

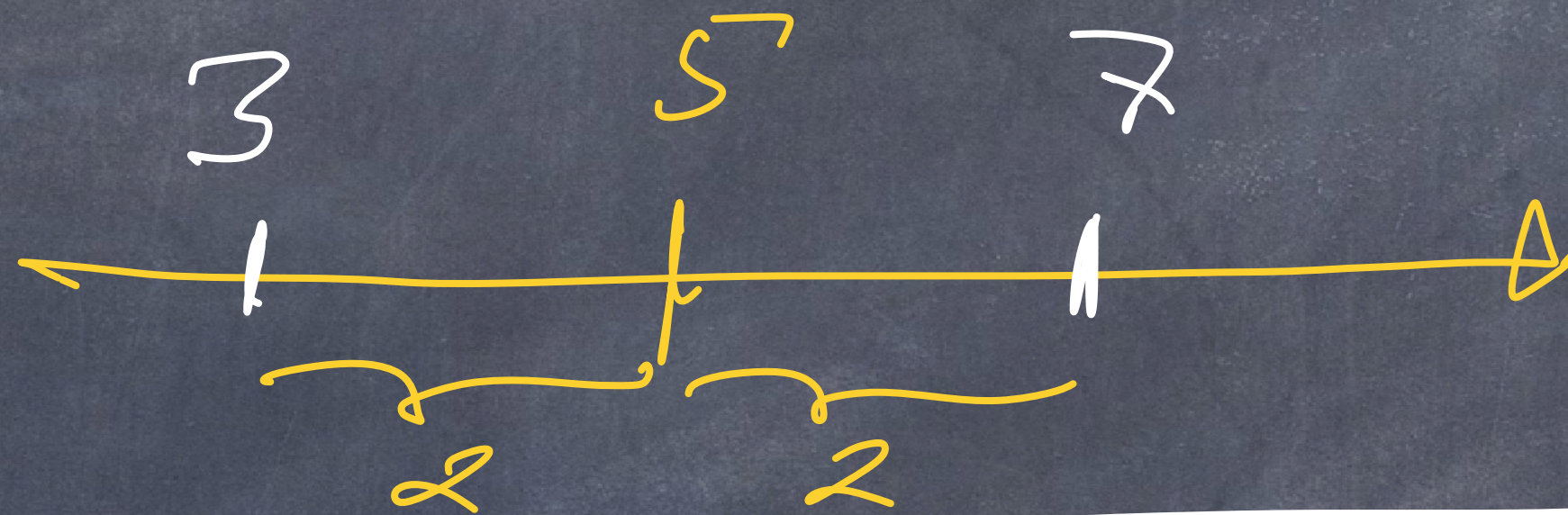


Lösungsgleichungen

$$|x-5| = 2$$

ALT. (I) Abstandsbekanntung:

Suche x s.d. dass Abstand 2 zu 5 ist.



ALT. (II) Algebraisch Lösung

$$|x-5| = 2$$

$$\begin{aligned} &\iff \\ x-5 &= 2 \quad \vee \quad x-5 = -2 \end{aligned}$$

$$\iff$$

$$x = 7 \quad \vee \quad x = 3$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 7$$

Lös ekvationen $|5x + 3| = 7$

Alt sätt $5x = t$, ekvation blir $|t + 3| = 7$

① $\Rightarrow |t - (-3)| = 7$, dvs t är ett tal vars avstånd

från (-3) är 7



dvs $t = -10$ V $t = 4 \Rightarrow 5x = -10$ V $5x = 4 \Rightarrow x = -2$ V $x = \frac{4}{5}$

Alt.

② $|5x + 3| = 7$

$\Rightarrow 5x + 3 = 7$ V $5x + 3 = -7$

$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$ V $x = -2$

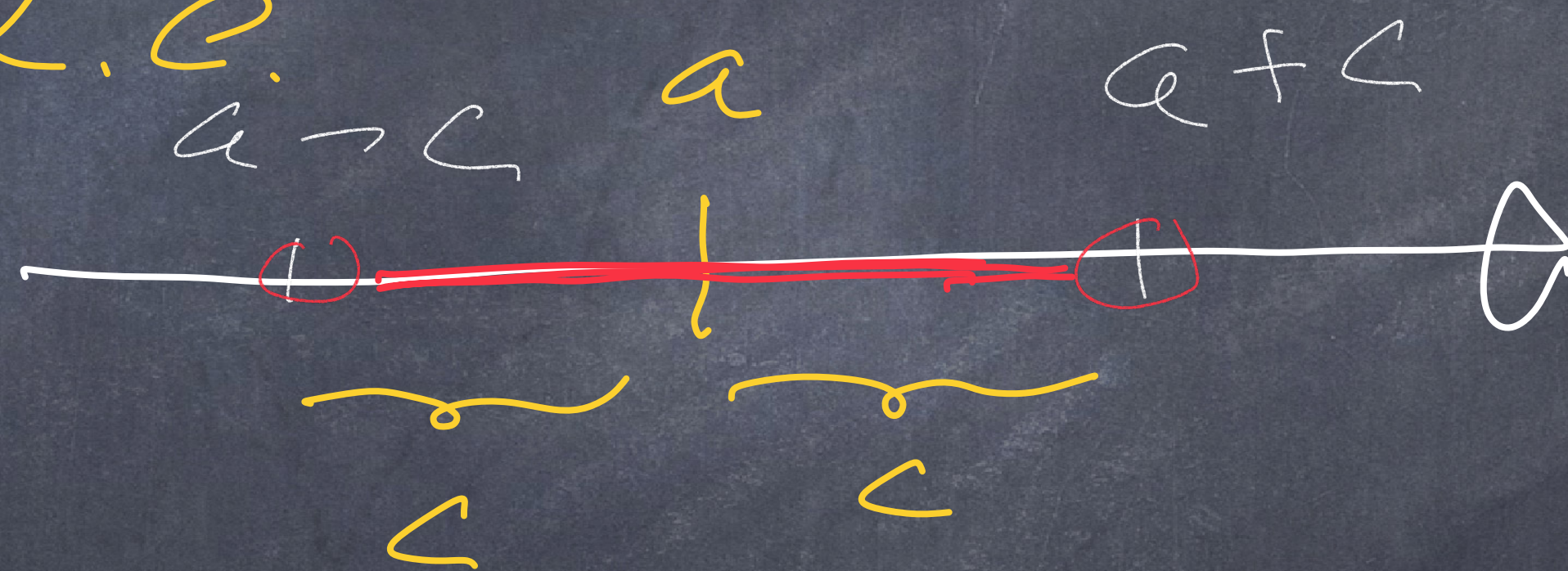
Svar: $x = -2$ eller $x = \frac{4}{5}$

○ Likheter av typ $|x-a| < c$

I

Avståndstolkning:

Vi söker x s.a dess avstånd till a är mindre än c l.e.



II

Algebraisk lösning:

OBS: $|t| < c \iff -c < t < c$

$$|x-a| < c \iff -c < x-a < c \iff a-c < x < a+c$$

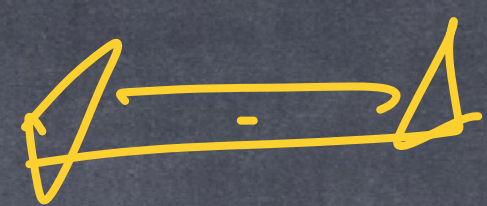
Svar: $x \in (a-c, a+c)$

Uppgift: $\angle$ ös olikheterna

• $|x| \leq 3$

• $|x + 2| < 4$

$$|x| \leq 3$$



$$-3 \leq x \leq 3$$

Svar: $x \in [-3, 3]$

Ös olukheten $|2x-3| < 5$

$$|2x-3| < 5 \iff -5 < 2x-3 < 5$$

$$\iff -2 < 2x < 8$$

$$\iff -1 < x < 4$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in (-1, 4)$$

Satz $\forall x, y \in \mathbb{R}$ s.a.

(i) $|x| = |-x|$

(ii) $x \leq |x|$

(iii) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

(iv) $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|, (y \neq 0)$

(v) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(Dreiecksungleichheit)

Beweis: $(\bar{L} \bar{L} \bar{L} \mid \mid x \mid \mid y \mid = \mid xy \mid$

Om $x \geq 0$ och $y \geq 0$ fås

$$V.L. = \mid x \mid \mid y \mid = \left\{ \begin{array}{l} \mid x \mid = x \quad \text{t.g. } x \geq 0 \\ \mid y \mid = y \quad \text{t.g. } y \geq 0 \end{array} \right\} = xy = \left\{ \begin{array}{l} xy \geq 0 \\ \text{t.g. } x \geq 0 \text{ \& } y \geq 0 \\ \text{så } \mid xy \mid = xy \end{array} \right\}$$

$$= \mid xy \mid = H.L.$$

Fallen $x < 0, y \geq 0$
och $x < 0, y \leq 0$ bevisas
på motsvarande sätt.

Om $x \geq 0, y \leq 0$ fås

$$V.L. = \mid x \mid \mid y \mid = \left\{ \begin{array}{l} \mid x \mid = x, \text{ t.g. } x \geq 0 \\ \mid y \mid = -y, \text{ t.g. } y \leq 0 \end{array} \right\} = x(-y) = -xy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -xy \geq 0, \text{ t.g. } x \geq 0 \text{ \& } y \leq 0 \\ \text{så } -xy = \mid xy \mid \end{array} \right\} = \mid xy \mid = H.L.$$

Triangelolikheten $|x+y| \leq |x| + |y|$

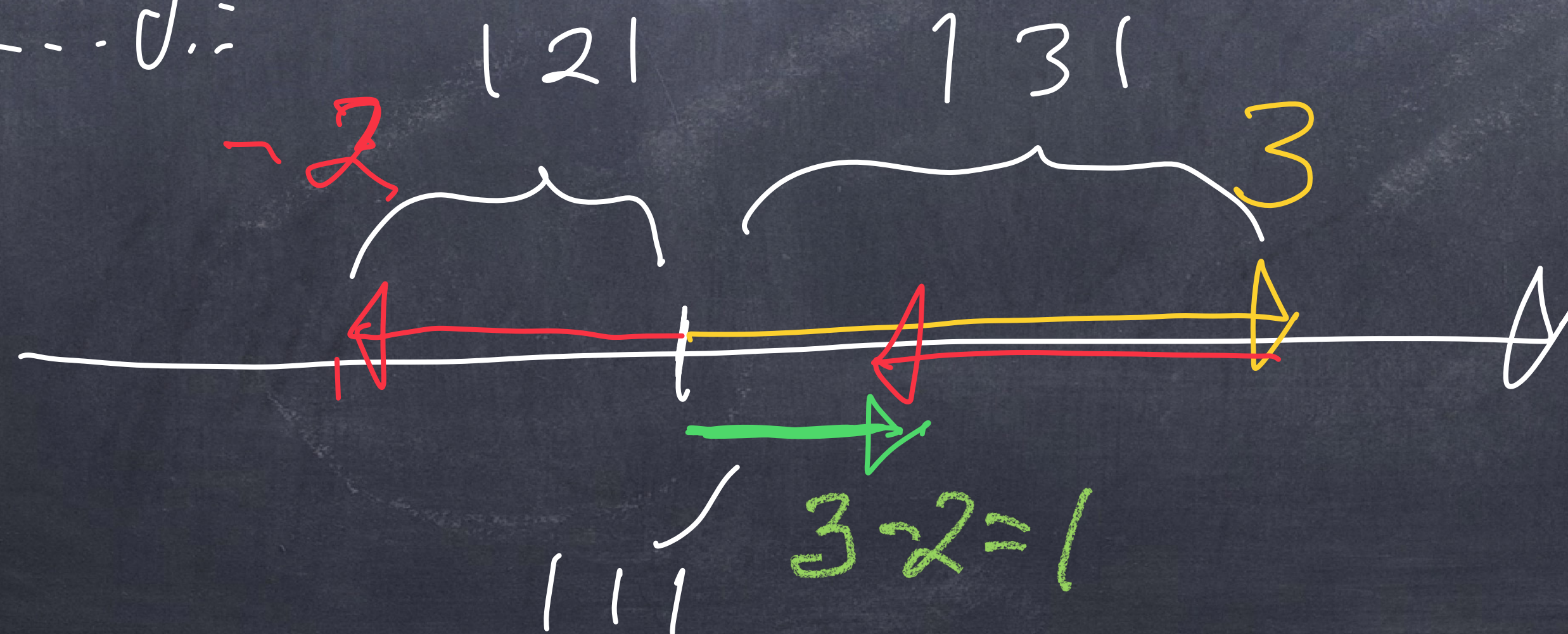
Exempel på $=$ resp. $<$:

$=$ gäller då $(x \geq 0 \text{ och } y \geq 0)$

och då $(x < 0 \text{ och } y < 0)$

$<$ gäller då $x \geq 0 \text{ och } y < 0$ eller vice versa.

Visualisering:



Ex: Ekvationen $|x+10| = |x|+11$

saken lösning ty

$$V.L. = |x+10| \leq |x| + |10| =$$

triangel
olikheten

$$= |x| + 10 < |x| + 11 = H.L.$$

$$\text{Så } V.L. < H.L. \quad \forall x.$$

Exempel på ekvationslösning

• $|2x - 4| = 3x$.

• $\exists$ flera som $V.L. = |\dots| \geq 0 \quad \forall x$, så

lösningar för $H.L. = 3x < 0$ dvs. för $x < 0$.

• Om $x \geq 0$ är ekv. uppfylld OMM

$(2x - 4) = 3x$ eller $-(2x - 4) = 3x$



$$\begin{cases} (2x-4) = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} -(2x-4) = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

keine Lösungen

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 4 = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

$$|f(x)| = g(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

✓

(see
example
on page 4)

$$\begin{cases} -f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$



$$f(x) = g(x)$$

✓

$$-f(x) = g(x)$$

(see example on page 4)

$$|x^2 - x - 2| = |x - 1| \quad \left(\begin{array}{l} |a| = |b| \\ \Downarrow \\ a = \pm b \end{array} \right)$$

$$\iff$$

$$x^2 - x - 2 = x - 1 \quad \text{eller} \quad x^2 - x - 2 = 1 - x$$

$$\iff x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 = 3$$

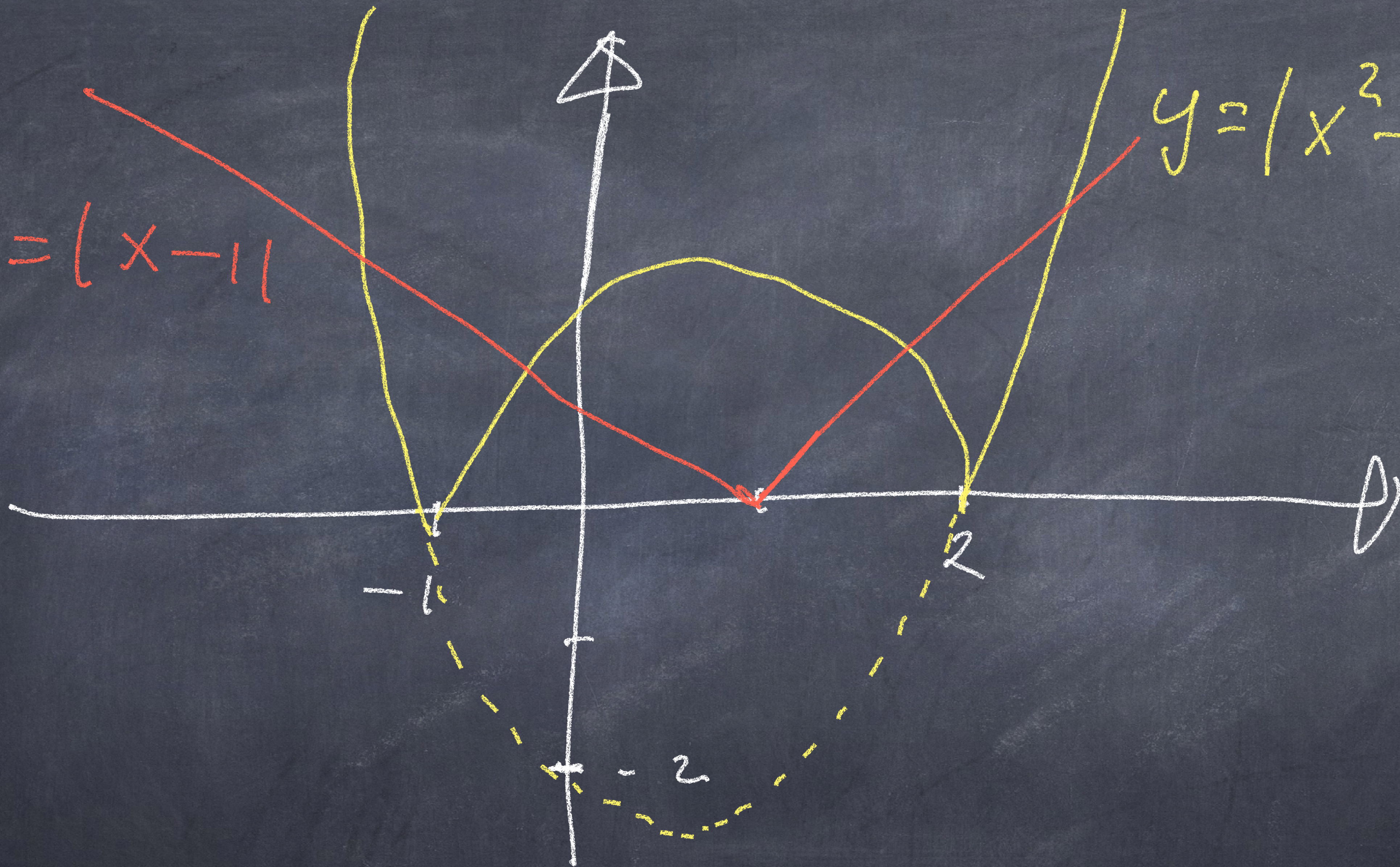
$$\iff x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

$$y = |x - 1|$$

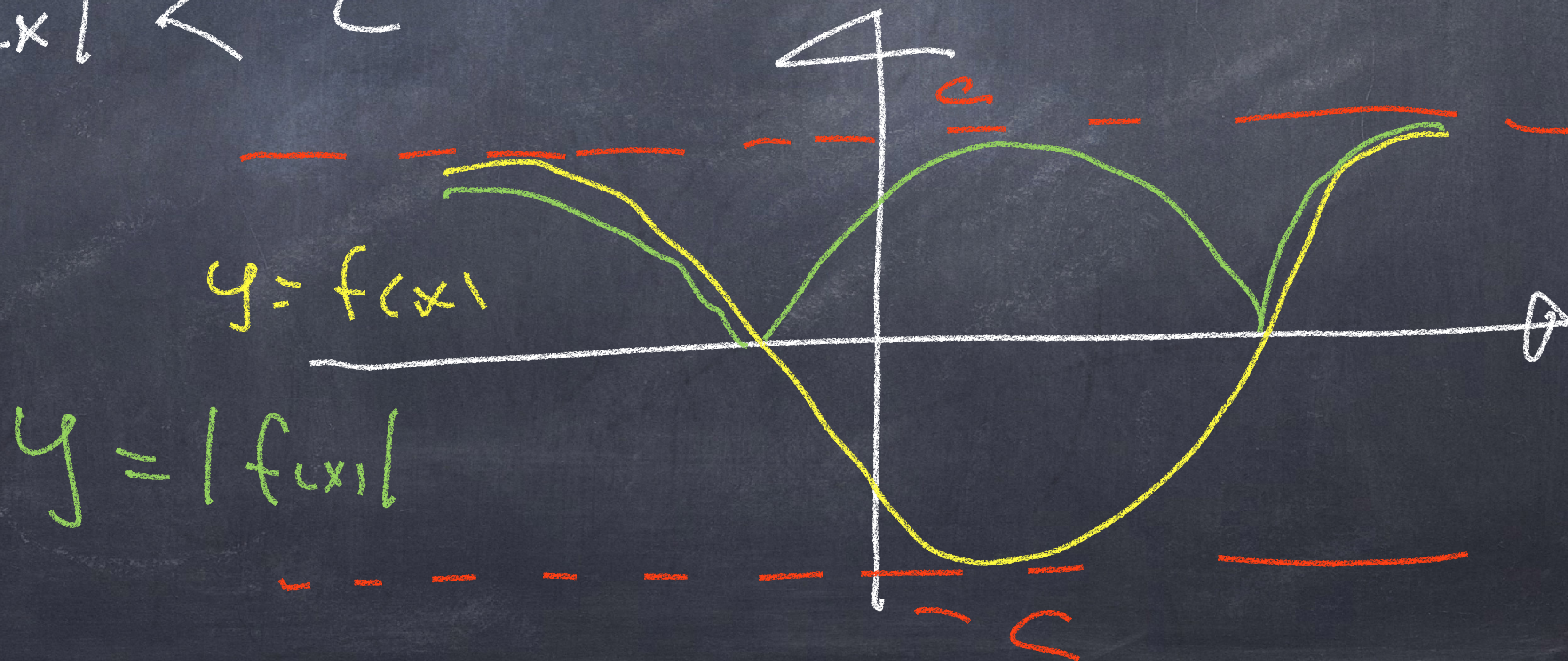
$$y = |x^2 - x - 2|$$



ÖLikheter med 1.1

$$|f(x)| < C \quad \Leftrightarrow$$

$$-C < f(x) < C$$



$$2.4: 3 \text{ (i)}$$

$$|x^2 - 1| \leq 1 \quad \Rightarrow$$

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad \checkmark \quad -\sqrt{2} \leq x \leq 0$$

$|x+3| \geq 2x$ (*), Löses med "falluppdelning"

$I_1 = (-\infty, -3)$ -3 $I_2 = [-3, \infty)$

$x+3 < 0 \Rightarrow |x+3| = -(x+3)$

SG (*) ~~$\Rightarrow$~~

$-(x+3) \geq 2x$

$x+3 \geq 0 \Rightarrow |x+3| = x+3$

SG (*) ~~$\Rightarrow$~~

$(x+3) \geq 2x$

På $I_1 = (-\infty, -3]$ fås villkoret

$$-(x+3) \geq 2x \iff -x-3 \geq 2x$$

$$\iff 3x < -3 \iff x < -1, \text{ uppfyllt } \forall x \in I_1$$

Så på I_1 får vi lösningsmängd $L_1 = I_1$

På $I_2 = [-3, \infty)$ fås villkoret

$$(x+3) \geq 2x \iff x \leq 3, \text{ så från } I_2$$

får vi lösningsmängd $L_2 = [-3, 3]$

Alltså har $|x+3| \geq 2x$

lösningssamling

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -3) \cup [-3, 3]$$

$$= (-\infty, 3]$$

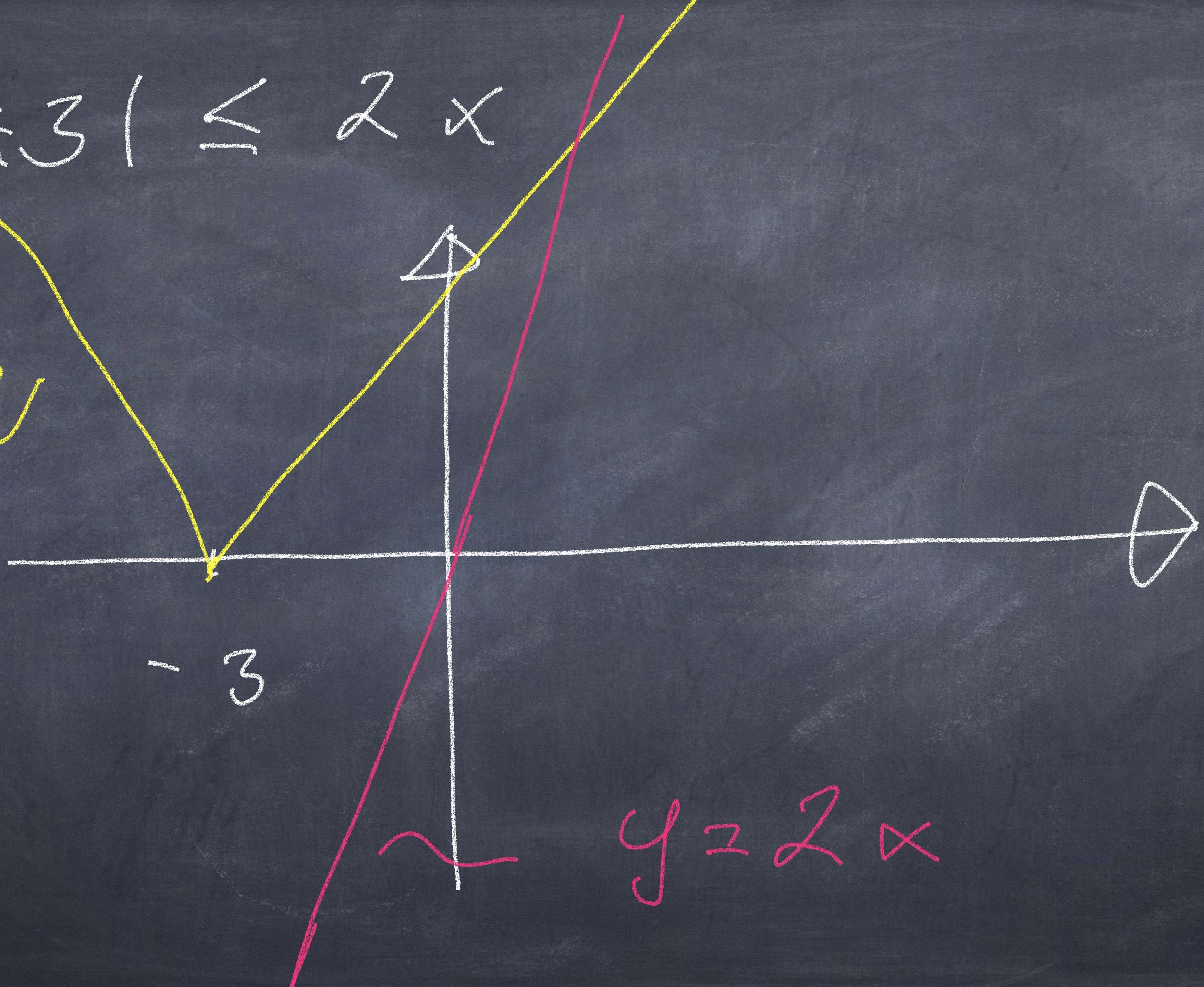
Svar: $x \leq 3$

$$|x+3| \leq 2x$$

$$y = x+3$$

-3

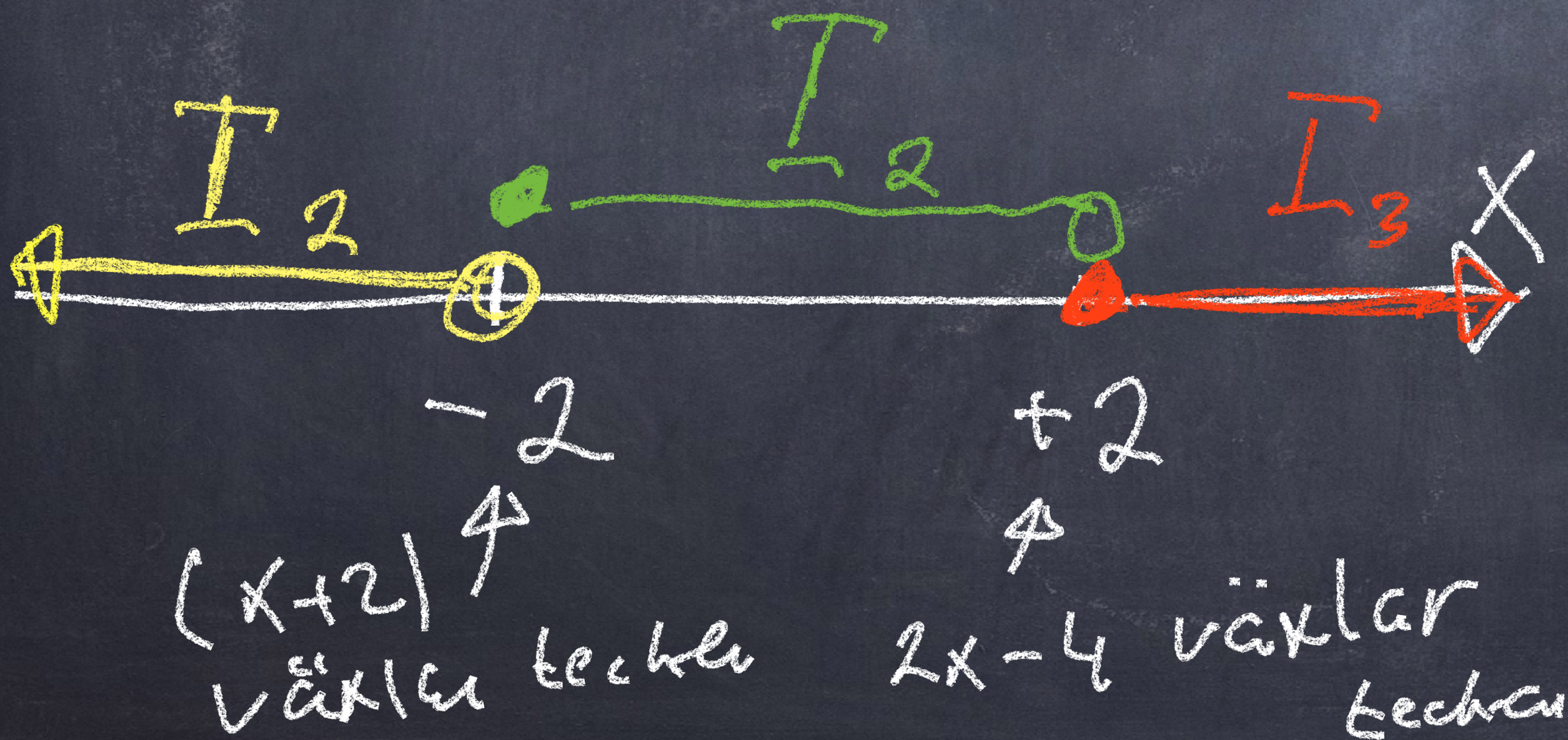
$$y = 2x$$



L^a_C ook heten

$$|2x - 4| < |x + 2|$$

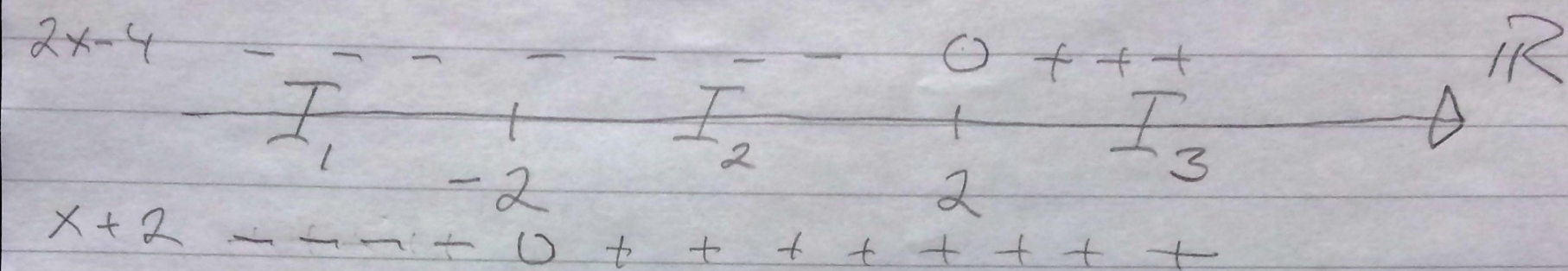
Fallappdelning



• Lös überhole $|2x-4| < |x+2|$ (*)

$2x-4$ växlar tecken i $x=2$

$x+2$ växlar tecken i $x=-2$



Falla ppdelning:

• I. Om $x \in I_1 = (-\infty, -2)$ är $2x-4 < 0$ & $x+z < 0$.
Då är (*) ~~1~~ $-(2x-4) < -(x+z)$

$$\Rightarrow (2x-4) > (x+2) \Rightarrow x > 6$$

Efftersom inget $x \in I$, uppfyller $x \geq 6$ är lösningssmängden på I , $L_1 = \emptyset$.

II. Om $x \in I_2 = [-2, 2)$ är $(2x-4) < 0$ & $x+2 \geq 0$

Nå är (*) ~~11~~ $-(2x-4) < x+2$

~~$-2x + 4 < x + 2$~~ ~~$3x > 2$~~ ~~$x > \frac{2}{3}$~~

Lösningsmängden L_2 är de $x \in I_2$ och som uppfyller $x \geq \frac{2}{3}$,
dvs. $L_2 = (\frac{2}{3}, 2)$.

Om $x \in I_3 = [2, \infty)$ är $2x-4 > 0$, $x+2 > 0$
 Då är (*) ~~ifall~~ $2x-4 < x+2$ ~~ifall~~ $x < 6$

Lösningsmängd L_3 på I_3 är alltså $L_3 = [2, 6)$

Lösning till (*) på $\mathbb{R}$ ges av

$$X \in L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2/3, 6)$$