

Föreläsning 5

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

8 september 2022

Ekvationslösning. Polynom. Olikheter

- Ekvationslösning — principer och logik;
- Polynom och polynomekvationer;
- Faktorsatsen och faktorisering av polynom;
- Lösning av polynomiella och rationella olikheter.

Ekvationer

En **ekvation** (eller en olikhet) är en **öppen utsaga**.

$$\text{"Lös ekvationen } x^2 - 2x + 1 = 0\text{"}$$

betyder

"För vilka värden på x är utsagan $x^2 - 2x + 1 = 0$ en sann utsaga."

Ekvationer

En **ekvation** (eller en olikhet) är en **öppen utsaga**.

$$\text{”Lös ekvationen } x^2 - 2x + 1 = 0\text{”}$$

betyder

”För vilka värden på x är utsagan $x^2 - 2x + 1 = 0$ en sann utsaga.”

En ekvation (olikhet) kan ses som ett **villkor** på den/de obekanta variablerna.

Ekvationer

Exempel

Lös ekvationen $3x + 5 = x - 1$.

Ekvationer

Exempel

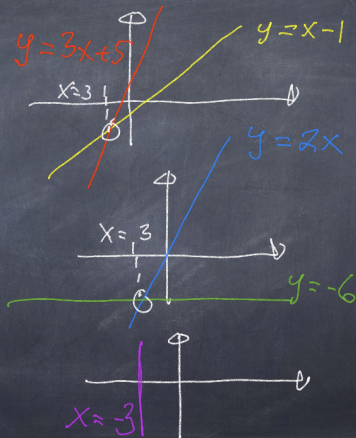
$$3x + 5 = x - 1$$



$$2x = -6$$



$$x = -3$$



Ekvationer

Exempel

Lös ekvationen $\sqrt{x+3} = x+1$.

Ekvationer

$\sqrt{x+3} = (x+1)$

$\Rightarrow$ [ej ekvivalens!
p. ge. kvadrering
PRÖVNING LOGISK
nödvändig] $\left(\begin{array}{l} \text{t.g. } a^2 = b^2 \\ \not\Rightarrow a = b \end{array} \right)$

$(x+3) = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow$

$x^2 + x - 2 = 0$

Lösning $\Leftrightarrow$ $x = 1$ ✓ $x = -2$

"falsk
rot"

Prövning

$x = 1$ ger v.l. = $\sqrt{1+3} = 2$
h.l. = $(1+1) = 2$

$x = -2$ ger v.l. = $\sqrt{-2+3} = 1$
h.l. = $-2+1 = -1$

Ekvationer

$$\sqrt{x+3} = (x+1)$$

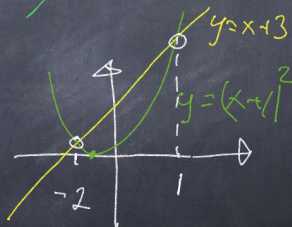
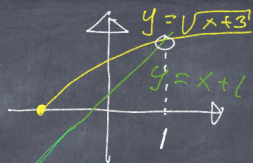


$$(x+3) = (x+1)^2$$



$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \checkmark \quad x = -2$$



Andragradsekvationer

Andragradsekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Andragradsekvationer

Andragradsekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Genom ledvis division med a fås, med $p = b/a$ och $q = c/a$,

$$x^2 + px + q = 0 \iff x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Andragradsekvationer

Andragradsekvationer

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad \text{sätt } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Andragradsekvationer

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow (*) \left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \stackrel{(**)}{=} \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a \cdot a}}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Andragradsekvationer

$$\begin{aligned} (x + \frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2})^2 - q \\ \Leftrightarrow (x + \frac{p}{2}) &= \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{ly} \quad y^2 = A \\ &\Leftrightarrow y = \pm A \end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}} = \\ \Rightarrow -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{\sqrt{4}} &= \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \end{aligned}$$

Andragradsekvationer

Exempel

Lös ekvationen $6x^2 + 5x + 1 = 0$.

Andragradsekvationer

$$\begin{aligned} 6x^2 + 5x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 &= \frac{25}{144} - \frac{24}{144} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 &= \frac{1}{144} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right) &= \pm \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \\ \text{eller} \\ x &= -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \\ \underline{\text{Svar:}} \quad x &\in \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Polynom

Definition

Ett **polynom** p i variabeln x av grad n med koefficienter a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, är ett uttryck av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{där } a_n \neq 0.$$

$a_n x^n$ kallas **ledande term**

$a_1 x$ kallas **linjär term**

a_0 kallas **konstanterm**.

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

$q(x) = (x - 2)(x - 1)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = 2$;

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

$q(x) = (x - 2)(x - 1)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = 2$;

$l(x) = 2x - 3$ är ett polynom, $\text{grad}(l) = 1$;

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

$q(x) = (x - 2)(x - 1)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = 2$;

$l(x) = 2x - 3$ är ett polynom, $\text{grad}(l) = 1$;

$k(x) = 7$ är ett **konstantpolynom** som har värde 7 för alla x ,
 $\text{grad}(k) = 0$;

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

$q(x) = (x - 2)(x - 1)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = 2$;

$l(x) = 2x - 3$ är ett polynom, $\text{grad}(l) = 1$;

$k(x) = 7$ är ett **konstantpolynom** som har värde 7 för alla x ,
 $\text{grad}(k) = 0$;

$n(x) = 0$ är det **konstantpolynom** som har värdet 0 för alla x ,
 $\text{grad}(n)$ är ej definierat (sägs ibland vara $= -\infty$).

Polynom

Exempel

$p(x) = 10x^5 - \pi x^2 + \frac{1}{2}$ är ett polynom, $\text{grad}(p) = 5$;

$q(x) = (x - 2)(x - 1)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = 2$;

$l(x) = 2x - 3$ är ett polynom, $\text{grad}(l) = 1$;

$k(x) = 7$ är ett **konstantpolynom** som har värde 7 för alla x ,
 $\text{grad}(k) = 0$;

$n(x) = 0$ är det **konstantpolynom** som har värdet 0 för alla x ,
 $\text{grad}(n)$ är ej definierat (sägs ibland vara $= -\infty$).

$r(x) = x^2 - x^{1/2} + 1$ är INTE ett polynom.

Polynom

Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad $n \geq 1$. Då gäller följande ekvivalens.

$$p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = \text{grad}(p) - 1$.

Polynom

Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad $n \geq 1$. Då gäller följande ekvivalens.

$$p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = \text{grad}(p) - 1$.

DVS: $x = a$ är en lösning till ekvationen $p(x) = 0$
OM OCH ENDA OM $(x - a)$ är en faktor i $p(x)$.

Polynom

Faktorsatsen — exempel

Ekvationen $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ har en lösning $x = 2$, och

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1).$$

Faktorsatsen och ekvationslösning - exempel

Antag att vi vill lösa ekvationen $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Vi ser att $x = 1$ är en lösning.

Alltså är $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)q(x)$ för något andragradspolynom $q(x)$.

Övriga lösningar till $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ fås från $q(x) = 0$.

Vi kan bestämma

$$q(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x - 1)}$$

om vi kan utföra **polynomdivisionen** i högerled.

Polynomdivision kan utföras i "trappan" eller "liggande stolen", precis som division av heltal.

Heltalsdivision

$$\begin{array}{r} 79 \\ 3 \overline{) 79} \\ \underline{-6} \\ 19 \\ \underline{-18} \\ 1 \end{array}$$

$79 = 3 \cdot 26 + 1$

Kvant 26 REST 1

Vad vi faktiskt gör i "Liggande" $\rightarrow$ ställen

$$\begin{aligned} 79 &= 3 \cdot 20 + 19 \\ &= 3 \cdot 20 + 3 \cdot 6 + 1 \\ &= 3 \cdot (20 + 6) + 1 \\ &= 3 \cdot 26 + 1 \end{aligned}$$

(*) och i "kortdivision"

Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
 \frac{2x^3 + x^2 + 4}{x + 2} = \\
 \quad \text{KOT} \\
 \quad \underline{2x^2 - 3x + 6} + \frac{8}{x + 2} \\
 \quad \text{REST}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \underline{2x^2 - 3x + 6} \text{ KOT} \\
 2x^3 + x^2 + 4 \mid x + 2 \\
 \underline{-(2x^3 + 4x^2)} \\
 -3x^2 + 4 \\
 \underline{-(-3x^2 - 6x)} \\
 6x + 4 \\
 \underline{-(6x + 12)} \\
 -8 \\
 \text{REST}
 \end{array}$$

$\Rightarrow (x+2) \mid (2x^2 - 3x + 6) + 8$

Polynomdivision

Uppgifter

Utför polynomdivisionen

I.

$$\frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

II.

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

Polynomdivision

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 1}{x + 1} &= \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(\cancel{x + 1})(x - 1)}{(\cancel{x + 1})} \\ &= \underline{\underline{(x^2 + 1)(x - 1)}} \end{aligned}$$

Polynomdivision

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1} = x^3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ \hline x^5 + x^3 + 1 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -(x^5 + x^3) \\ \hline 1 \end{array}$$

Ekvaionslösning med faktorsatsen

Exempel

Lös ekvationen $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Ekvaionslösning med faktorsatsen

Exempel: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Lösning Ser att $x=1$ är en lösning
 $\Rightarrow (x-1)$ är en faktor i v.l.

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ 0 - 4x + 4 \\ \quad \underline{-4x + 4} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

Polynomdivision ger

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

$$= (x-1)(x^2 - 4)$$

$$\text{Så } x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ eller } x^2 - 4 = 0$$

Ekvaionslösning med faktorsatsen

$$(\text{forts}) \Rightarrow x = 1, x = 2 \vee x = -2.$$

$$\left(\text{och } x^3 - x^2 - 4x + 4 \right. \\ \left. \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-2) \right)$$

Polynomdivision

Sats. Divisionsalgoritmen för polynom

För alla polynom $f(x)$ och $g(x)$ av gradtal ≥ 1 , så finns det två polynom $q(x)$ och $r(x)$, $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$, sådana att

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \quad \left(\Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \right)$$

Division av f med g ger en kvot q med en rest r av lägre gradtal än nämnaren g .

Specialfall: Om $\text{grad}(g) = 1$ är r ett konstantpolynom.

Specialfall: Om $r = 0$ "går divisionen jämnt upp", dvs q är en faktor i f .

Heltalsdivision

Sats. Divisionsalgoritmen för naturliga tal

För alla naturliga tal m och n , så finns det två heltal $q \geq 0$ och $r \geq 0, r < n$, sådana att

$$m = nq + r \quad \left(\Longleftrightarrow \frac{m}{n} = q + \frac{r}{n} \right)$$

Division av m med n ger en kvot q med en rest r , där resten är mindre än nämnaren n .

Specialfall: Om $r = 0$ "går divisionen jämnt upp", dvs n är en faktor i m

Bevis av Faktorsatsen

Faktorsatsen

Låt $p(x)$ vara ett polynom av grad $n \geq 1$. Då gäller följande ekvivalens.

$$p(a) = 0 \iff p(x) = (x - a)q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom, $\text{grad}(q) = \text{grad}(p) - 1$.

DVS: $x = a$ är en lösning till ekvationen $p(x) = 0$
OM OCH ENDA OM $(x - a)$ är en faktor i $p(x)$.

Bevis av faktorsatsen

Bevis av FAKTORSATSEN ($p(x)$ polynom)
Vi ska visa att $p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)q(x)$
Polynom

Vi gör det genom att visa
implikationen i bägge riktningarna

($\Rightarrow$) Antag att $p(x) = (x-a)q(x)$

Då är

$$p(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

Bevis av factorsatsen

$\Rightarrow$ Antag att $p(a) = 0$.

Vi dividerar $p(x)$ med $(x-a)$

Enligt divisionsalgoritmen finns
ett polynom $q(x)$ och en konstant r
sådana att

$$p(x) = (x-a)q(x) + r$$

Om vi sätter $x=a$ fås

$$0 = p(a) = \underbrace{(a-a)}_{=0} q(a) + r = r$$

Så $r=0$
och
 $p(x) = (x-a)q(x)$

Lösning av polynomekvationer

Sats

Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter, dvs $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Om ekvationen $p(x) = 0$ har en rationell lösning $x = \frac{s}{t}$, $s, t \in \mathbb{Z}$ så måste s dela a_0 och t dela a_n .

Se uppgift 2.2:4 och AIE sid 55.

Lösning av polynomekvationer — exempel

Lös ekvationen $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

Låt $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$. Om ekvationen har en lösning $\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ måste, enligt föregående sats, s dela 1 och t dela 2.

Alltså är då $s = \pm 1$ och $t = \pm 1$ eller $t = \pm 2$, så

$$\frac{s}{t} = \pm 1 \quad \text{eller} \quad \frac{s}{t} = \pm \frac{1}{2}$$

Prövning ger $p(1/2) = 0$, så $x = 1/2$ är en lösning, och $(x - 1/2)$ är då en faktor i $p(x)$.

Polynomdivision ger

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 2(x - 1/2)(x^2 + 1).$$

Ekvationen $p(x) = 0$ har alltså bara en reell lösning $x = 1/2$, och två icke-reella $x = \pm i$.

Olikheter

Sats

Låt a , b och k vara reella tal. Då gäller att

- 1 $a < b \iff a + k < b + k;$
- 2 $a < b \iff ak < bk, \quad k > 0;$
- 3 $a < b \iff ak > bk, \quad k < 0$

Oliketer

Bevis (iii)

$$\frac{a < b}{\Leftrightarrow (b-a) > 0} \quad \text{om} \quad \frac{k < 0}{\Leftrightarrow k(b-a) < 0}$$
$$\Leftrightarrow kb - ka < 0 \quad \Leftrightarrow kb < ka \quad \text{U.S.B.}$$

Exempel:

$$\begin{array}{cc} -3 < -2 & 2 < 3 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \end{array}$$


Oliketer

0

Lösung av oliketer

Ex: $x^2 \geq \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \geq 0 \quad (\neq)$

Faktorisera v.l.

$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-\frac{1}{2}$

så $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = (x-3)(x+\frac{1}{2})$

så $(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$

Oliketer

$(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$ studeras med teckentabell

	$-1/2$	3	x
$(x-3)$	-	0	+
$(x+\frac{1}{2})$	-	0	+
$(x-3)(x+\frac{1}{2})$	+	0	+

Slutsats:
 $(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3$

SVAR:
 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [3, \infty)$

Oliketer

Ex: $\frac{x^2-1}{x+3} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)} > 0$

x

	-3	-1	1	
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+
V.L.	-	+	0	+

Svar:
 $x \in (-3, -1) \cup (1, \infty)$

Oliketer

$$\underline{E_x} (E_x 2.3:2, MA \text{ sid } 55)$$

$$\frac{1}{1+x}$$

$$< 1-x$$

~~Var för~~²

$$1 < (1-x)(1+x)$$

1 MA löser man med faktorisering

Oliketer

Alternativ metod (bättre! (?!))

$$\frac{1}{x+1} < 1-x$$

~~$\Leftrightarrow$~~

$$\frac{1}{x+1} - (1-x) < 0$$

~~$\Leftrightarrow$~~

$$\frac{1}{x+1} + (x-1) < 0$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} < 0$$

~~$\Leftrightarrow$~~

$$\frac{1 + x^2 - 1}{(x+1)} < 0$$

~~$\Leftrightarrow$~~

$$\frac{x^2}{x+1} < 0$$

~~$\Leftrightarrow$~~

$$x+1 < 0$$

$$(\text{ty } x^2 \geq 0 \forall x)$$

Svar:

$$x < -1$$

Oliketer

$$\text{Lös } \sqrt{x+2} < x : \text{OBS: } 0 \leq \sqrt{x+2} < x$$

så alla lösningar måste uppfylla $x > 0$.

Om $x > 0$ så

$$\sqrt{x+2} < x$$

$$\Leftrightarrow (x+2) < x^2, x > 0$$

↑
Eg om $a, b > 0$
så $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x > 2 \vee x < -1) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$