

Föreläsning 2

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

30 augusti 2022

Mängdlära - definitioner och notation

Definition

En **mängd** är en samling väldefinierade och distinkta (olika) **element** (objekt).

Exempel: M är mängden

$$M = \left\{ A, B, 5, \pi, \sqrt{2}, -1, \frac{1}{3} \right\},$$

$A, B, 5$ osv är element i M , man säger att elementen **tillhör** M .
Symbolerna $\{$ och $\}$ kallas i detta sammanhang **mängdklamrar**.

Mängdlära - definitioner och notation

Symbolen $\in$.

$x \in A$ utläses "x tillhör mängden A ", dvs x är ett av elementen i A .

$x \notin A$ utläses "x tillhör **inte** mängden A ", elementet x tillhör inte mängden A .

Mängdlära - definitioner och notation

Symbolen $\in$.

$x \in A$ utläses "x tillhör mängden A ", dvs x är ett av elementen i A .

$x \notin A$ utläses "x tillhör **inte** mängden A ", elementet x tillhör inte mängden A .

Exempel

$$a \in \{a, b, c\}$$

$$d \notin \{a, b, c\}$$

$$2 \notin M$$

$$\pi \in M$$

$$(\text{där } M = \{A, B, 5, \pi, \sqrt{2}, -1, \frac{1}{3}\}.)$$

Mängdlära - definitioner och notation

Olika sätt att beskriva mängder:

$$K = \{2, 4, 6, 8\}$$

Lista (uppräkning)

Mängdlära - definitioner och notation

Olika sätt att beskriva mängder:

$$K = \{2, 4, 6, 8\}$$

Lista (uppräkning)

$$L = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$$

Ändlig lista med antytt mönster

Mängdlära - definitioner och notation

Olika sätt att beskriva mängder:

$$K = \{2, 4, 6, 8\}$$

Lista (uppräkning)

$$L = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$$

Ändlig lista med antytt mönster

$$J = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$$

Oändlig lista med antytt mönster

Mängdlära - definitioner och notation

Olika sätt att beskriva mängder:

$$K = \{2, 4, 6, 8\}$$

Lista (uppräkning)

$$L = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$$

Ändlig lista med antytt mönster

$$J = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$$

Oändlig lista med antytt mönster

$$\mathbb{N} = \{\text{alla naturliga tal}\}$$

Beskrivning med ord

Mängdlära - definitioner och notation

Mängder kan också beskrivas med villkor på elementen:

Exempel

$$S = \{m \in \mathbb{N} : m \geq 100\}$$

Symbolen : utläses ”sådana att ” , dvs

$S =$ ”mängden av alla naturliga tal större än eller lika med 100”
 $= \{100, 101, 102 \dots\}$

Mängdlära - definitioner och notation

Några standardbeteckningar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

de naturliga talen

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

de hela talen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

de rationella talen

$$\mathbb{R} = \{\text{alla reella tal}\}$$

de reella talen

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

de komplexa talen

Mängdlära - definitioner och notation

Uppgift

Låt

$$L = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\}$$

Skissera en bild av mängden L .

Mängdlära - definitioner och notation

Uppgift

Låt

$$L = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\}$$

Skissera en bild av mängden L .

L är den räta linjen i xy -planet som har ekvationen $y = 2x - 1$.

Mängdlära - definitioner och notation

Den tomma mängden är den mängd som inte innehåller några element

$$\emptyset = \{\}$$

Mängdlära - definitioner och notation

Den tomma mängden är den mängd som inte innehåller några element

$$\emptyset = \{\}$$

Uppgift

Vad säger följande ekvation?

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\} = \emptyset$$

Mängdlära - definitioner och notation

Den tomma mängden är den mängd som inte innehåller några element

$$\emptyset = \{\}$$

Uppgift

Vad säger följande ekvation?

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\} = \emptyset$$

"Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2"
(detta ska vi bevisa i nästa vecka)

Mängdlära - definitioner och notation

Uppgifter

Ge följande mängder alternativa beskrivningar med hjälp av mängdnotation.

$$(a) \quad X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\}$$

$$(b) \quad T = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

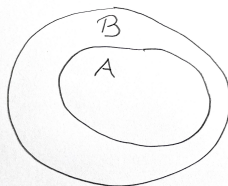
Mängdlära - delmängder

Definition

En mängd A är en **delmängd** till en mängd B ,

$$A \subseteq B$$

om alla element i A också är element i B .



Mängdlära - delmängder

Exempel

Om $B = \{1, 2, 3, 4\}$ gäller att

$$\{1, 2\} \subseteq B$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq B$$

$$\{3, 5\} \not\subseteq B$$

Observera att

$$\{3\} \subseteq B \text{ och } 3 \in B \text{ men } \{3\} \notin B \text{ och } 3 \notin B$$

Mängdlära - delmängder

Den tomma mängden

Den tomma mängden är en delmängd till varje mängd, dvs för en godtycklig mängd A gäller att

$$\emptyset \subset A$$

Exempel

Speciellt är den tomma mängden en delmängden till mängden B på föregående sida

$$\emptyset \subset B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Mängdlära - delmängder

Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ så har de samma element, $A = B$.

Mängdlära - delmängder

Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ så har de samma element, $A = B$.

Om $A \subseteq B$ men $A \neq B$, sägs A vara en **äkta delmängd** till B ,
 $A \subset B$.

Mängdlära - delmängder

Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ så har de samma element, $A = B$.

Om $A \subseteq B$ men $A \neq B$, sägs A vara en **äkta delmängd** till B ,
 $A \subset B$.

Exempel

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ men också $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$\{1\} \subseteq \{0, 1\}$ men också $\{1\} \subset \{0, 1\}$

$\{0, 1\} \subseteq \{0, 1\}$ men däremot $\{0, 1\} \not\subset \{0, 1\}$

Ändliga mängders kardinalitet

Definition

För en mängd M med **ändligt många** element defineras dess **kardinalitet** som **antalet element i mängden**,

$$|M| = \text{antalet element i } M.$$

Exempel

Om $M = \{A, B, 5, \pi, \sqrt{2}, -1, \frac{1}{3}\}$ så är

$$|M| = 7$$

Ändliga mängders kardinalitet

En liten övning i att skilja på begreppen

0 talet noll $\emptyset = \{ \}$ tomma mängden

$$|\{ \}| = 0$$

$$\{0\}$$

$$|\{0\}| = 1$$

Ändliga mängders kardinalitet

En till liten övning i att skilja på begreppen

$M = \{0, \{0\}\}$ en mängd med elementen 0 och $\{0\}$

$0 \in M$

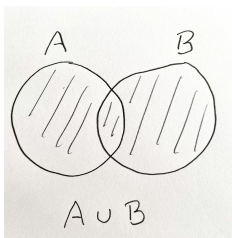
$\{0\} \in M$

$\{0\} \subseteq M$ och $\{0\} \subset M$

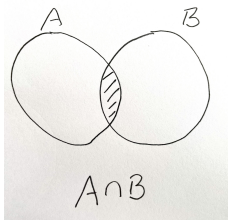
$\{\{0\}\} \subseteq M$ och $\{\{0\}\} \subset M$

$|M| = 2$

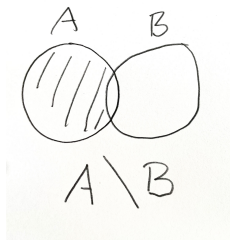
Operationer på mængder



Union



Snitt

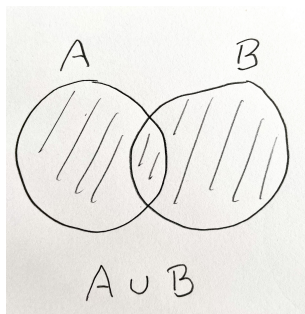


Differens

Operationer på mängder - Union.

Om A och B är mängder ges deras **union** av

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

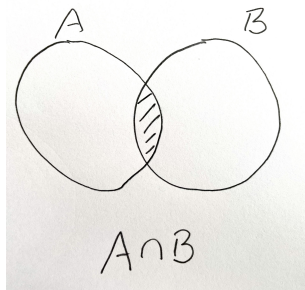


$A \cup B$ består av alla element som ligger i A eller B , dvs i minst en av de två mängderna A och B .

Operationer på mängder - Snitt.

Om A och B är mängder ges deras **snitt** (**skärning**) av

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$$

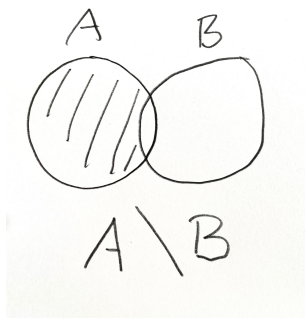


$A \cap B$ består av alla element som ligger både i A och i B , dvs de gemensamma elementen för A och B .

Operationer på mängder - differens

Om A och B är mängder ges **differensen** av A och B av

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ och } x \notin B\}$$



$A \setminus B$ består av alla element som ligger i A men inte i B .

Operationer på mängder

Uppgift 1

Om $X = \{2, 3, 5\}$ och $Y = \{3, 6, 7\}$, bestäm

$$X \cup Y$$

$$X \cap Y$$

$$X \setminus Y$$

Uppgift 2

Beskriv mängderna

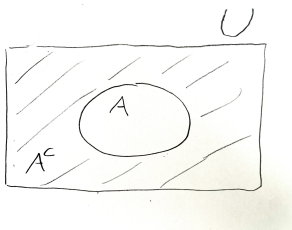
$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$$

Operationer på mängder - komplement

Om A är en mängd som är en delmängd av någon "grundmängd" (univers) U definieras **komplementet till A relativt U** som

$$A^C = \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus A$$



Ibland är grundmängden underförstådd av sammanhanget, och då räcker det att tala om **komplementet till A** , $A^C = \{x : x \notin A\}$.

Operationer på mängder - komplement

Exempel

Om vi har $\mathbb{N}$ som univers och

$$J = \{\text{alla jämna naturliga tal}\}$$

är

$$J^C = \{\text{alla udda naturliga tal}\}$$

Intervall av reella tal

Intervall är en viktig typ av delmängder till de reella talen $\mathbb{R}$.

Intervallnotation

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, öppet intervall

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, slutet intervall

Lösningsmängder

Lösningsmängden till en ekvation. Exempel.

Lösningsmängden L till ekvationen $x^2 - 4 = 0$ är

$$L = \{-2, 2\}$$

Lösningsmängden till en olikhet Exempel.

Lösningsmängden K till olikheten $2x > 10$ är

$$K = \{x : x > 5\} = (5, \infty)$$

Lösningsmängder

Uppgift

Skriv lösningsmängden till olikheten

$$-4 < 2x \leq 3$$

(a) med mängdklamrar (b) med intervallnotation

Lösningsmängder

Exempel

Vi har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ekvation (1) har lösningsmängden $L_1 = \{1, 2\}$ och ekvation (2) har lösningsmängden $L_2 = \{-1, 1\}$.

Lösningsmängden L till ekvationssystemet består av de x som uppfyller både (1) och (2), dvs

$$L = L_1 \cap L_2.$$

de Morgans lagar

Sats

Om A och B är mängder gäller att

$$(a) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(b) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

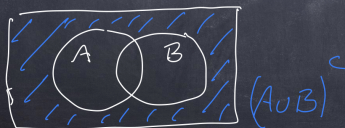
de Morgans lagar - bevis

$$\text{Bevis } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B$$

$$\iff x \notin A \text{ och } x \notin B$$

$$\iff x \in A^c \text{ och } x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c$$



EXTRA Examineras Ej

Oändliga mängders
Kardinalitet
- en orientering

EXTRA Examineras Ej

Kardinalitet för mängder
med oändligt många element.

Ex: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$$\mathbb{J} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\text{rationella tal}\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{reella tal}\}$$

EXTRA Examineras Ej

Dessa mängder bildar en kedja av äkta delmängder

$$\mathbb{J} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

och mängderna

$$\mathbb{N} \setminus \mathbb{J}, \quad \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \quad \text{och} \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

innehåller alla oändligt många element.

Ändå är de tre första mängderna $\mathbb{J}$, $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Q}$ "lika stort" oändliga, medan $\mathbb{R}$ är "mycket större".

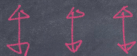
EXTRA Examineras Ej

Def. Två mängder $\underline{X}$ och $\underline{Y}$
har samma kardinalitet om
det finns en s.k. bijektiv
funktion $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$

Med andra ord, om det finns en
funktion som "parar ihop" elementen
i $\underline{X}$ och $\underline{Y}$ så att varje $x \in \underline{X}$
motsvaras av ett $y \in \underline{Y}$, och vice versa.

EXTRA Examineras Ej

$$\bar{X} = \{a, b, c\}$$



$$Y = \{0, 1, 2\}$$

Bijektion $f: \bar{X} \rightarrow Y$

$$f(a) = 0 \quad f(b) = 1$$

$$f(c) = 2$$

$$\text{Alltså } |\bar{X}| = |Y|$$

$$\bar{X} = \{a, b, c\}$$

$$Z = \{1, 2\}$$

Ingen bijektion
möjlig

$$|\bar{X}| \neq |Z|$$

EXTRA Examineras Ej

$$\mathbb{J} = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{J} \quad f(n) = 2n$$

bijectiv funktion
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{J}$

alltså $|\mathbb{N}| = |\mathbb{J}|$

samma kardinalitet

EXTRA Examineras Ej

Att visa att N och Q har samma kardinalitet.

N och Q

$|N| = |Q|$

EXTRA Examineras Ej

Man kan däremot visa att $\mathbb{R}$ inte har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$ med ett motsägelsebevis:

Antag motsatsen, att $\mathbb{R}$ har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$. Det betyder att vi kan göra en lista med alla reella tal, dvs de kan numreras. Antag att denna lista ser ut så här, där vi skrivit tal nummer n i listan på decimalform med en heltalsdel x_n och decimaler $d_{n1}d_{n2}d_{n3}\dots$,

$$r_1 = x_1.d_{11}d_{12}d_{13}\dots$$

$$r_2 = x_2.d_{21}d_{22}d_{23}\dots$$

$$r_3 = x_3.d_{31}d_{32}d_{33}\dots$$

osv

Hur vi än gjort denna lista kan vi hitta ett reellt tal som inte finns med i listan: Låt första decimalen vara något annat än d_{11} , låt andra decimalen vara något annat än d_{22} osv, på så sätt får vi ett tal som inte är lika med något av talen i listan.

EXTRA Examineras Ej

$$|\mathbb{D}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$$

över-
uppräknligt
oändligt

uppräknligt
oändliga

EXTRA Examineras Ej

Två Youtbe-filmer på detta tema

Infinty is bigger than you think:

<https://youtu.be/elv0Zm0d4H0>

The Infinte hotel paradox: https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo