

Föreläsning 1

SF1661 Perspektiv på matematik

Hans Thunberg, thunberg@math.kth.se

29 augusti 2022

Naturliga tal

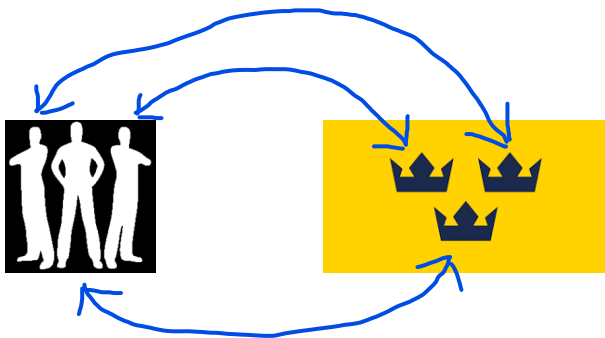
De naturliga talen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Vad är ett naturligt tal?



Vad är ett naturligt tal?



Vad är ett naturligt tal?



Vad är ett naturligt tal?



De naturliga talen $\mathbb{N}$ kan ses som en **egenskap hos mängder**.

Representation av naturliga tal



Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

- |||||
- V

Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

■ V

romerska siffror

Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

■ V

■ 5

romerska siffror

Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

■ V

romerska siffror

■ 5

hindu-arabiska siffror, decimalt (bas tio)

Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

■ V

romerska siffror

■ 5

hindu-arabiska siffror, decimalt (bas tio)

■ 101



Representation av naturliga tal



Exempel

Det naturliga talet som vi kallar "fem" kan skrivas på många olika sätt

■ |||||

■ V

romerska siffror

■ 5

hindu-arabiska siffror, decimalt (bas tio)

■ 101

hindu-arabiska siffror, binärt (bas två)



Positionssystem

OBS

När vi skriver med romerska siffror har symbolerna ett fixt värde, men när vi skriver med hind-arabiska siffror beror siffrornas värde på deras position.

Exempel

Romerska siffror:

$$XXV = 10 + 10 + 5 = 25$$

$$\text{Decimalt positionssystem: } 2305 = \mathbf{2000} + \mathbf{300} + \mathbf{00} + \mathbf{5}$$

Decimalt positionssystem — bas tio

Tio stycken symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Siffrornas värde ökar från höger till vänster genom succesiv multiplikation med tio.

Exempel

$$6209_{\text{tio}} = 6 \cdot \text{tio}^3 + 2 \cdot \text{tio}^2 + 0 \cdot \text{tio}^1 + 9 \cdot \text{tio}^0$$

Binärt positionssystem — bas två

Två stycken symboler: 0, 1

Siffrornas värde ökar från höger till vänsterr genom succesiv multiplikation med två.

Exempel

$$\begin{aligned}10110_{\text{två}} &= 1 \cdot \text{två}^4 + 0 \cdot \text{två}^3 + 1 \cdot \text{två}^2 + 1 \cdot \text{två}^1 + 0 \cdot \text{två}^0 = \{i \text{ bas tio} \} \\&= (1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)_{\text{tio}} \\&= (1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)_{\text{tio}} \\&= (16 + 4 + 2)_{\text{tio}} = (22)_{\text{tio}}\end{aligned}$$

Hexadecimalt positionssystem — bas 16

Sexton stycken symboler: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 och

$$A = 10_{\text{tio}}, B = 11_{\text{tio}}, C = 12_{\text{tio}}, D = 13_{\text{tio}}, E = 14_{\text{tio}}, F = 15_{\text{tio}}$$

Siffrornas värde ökar från höger till vänster genom succesiv multiplikation med sexton.

Exempel

$$\begin{aligned} 2C4_{\text{sexton}} &= 2 \cdot \text{sexton}^2 + C \cdot \text{sexton}^1 + 4 \cdot \text{sexton}^0 = \{i \text{ bas tio} \} \\ &= (2 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0)_{\text{tio}} \\ &= (2 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 4 \cdot 1)_{\text{tio}} \\ &= (512 + 192 + 4)_{\text{tio}} = (708)_{\text{tio}} \end{aligned}$$



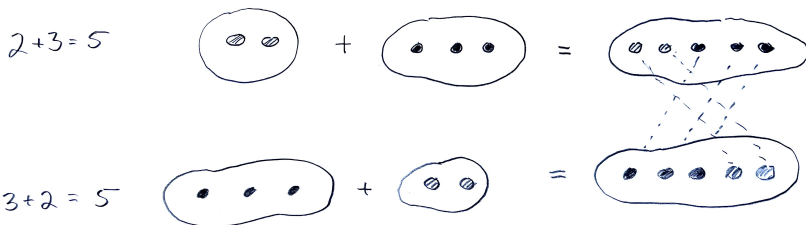
Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ -addition

Addition - en informell definition

Tag en mängd med m stycken element (dvs en ämngd som har egenskapen "egenskapen m ") och tag en annan mängd med n stycken element (dvs en ämngd som har egenskapen "egenskapen n ").

Bilda sedan en ny mängd som innehåller alla element ifrån de två mängderna. Den "egenskap" som denna nya mängd har kallar vi för $m + n$, **summan av** m och n ,
dvs $m + n$ definieras som antalet element i den nya mängden.

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ -addition



$m + n = n + m$
för alla naturliga tal n och m

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ - multiplikation

Multiplikation - en informell definition

Tag m stycken mängder som var och en innehåller n stycken element.

Bilda sedan en ny mängd som innehåller alla elementen ifrån alla mängderna. Den "egenskap" som denna nya mängd har kallar vi för $m \cdot n$, **produkten av** m och n , dvs $m \cdot n$ definieras som antalet element i en mängd som bildats av m stycken mängder med n element vardera.

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ - multiplikation

Multiplikation - en informell definition

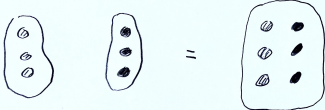
Tag m stycken mängder som var och en innehåller n stycken element.

Bilda sedan en ny mängd som innehåller alla elementen ifrån alla mängderna. Den "egenskap" som denna nya mängd har kallar vi för $m \cdot n$, **produkten av** m och n , dvs $m \cdot n$ definieras som antalet element i en mängd som bildats av m stycken mängder med n element vardera.

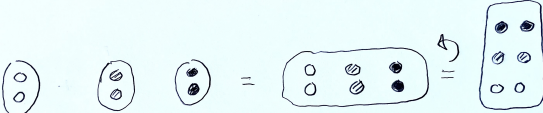
Om m och n är stora tal, hur kan man förstå att $m \cdot n = n \cdot m$?

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ - multiplikation

$2 \cdot 3 = 6$



$3 \cdot 2 = 6$



$m \cdot n = n \cdot m$
för alla naturliga tal n och m

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ - egenskaper

Sats

Om m , n och p är naturliga tal så gäller att

- 1 $n + m = m + n$ (kommutativa lagen för addition)
- 2 $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativa lagen för addition)
- 3 $n \cdot m = m \cdot n$ (kommutativa lagen för multiplikation)
- 4 $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associativa lagen för multiplikation)
- 5 $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ (1 är identitetsselement för multiplikation)
- 6 $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ (distributiva lagen)

Räkneoperationer i $\mathbb{N}$ - egenskaper

Uppgifter

1. Illustrera associativa lagen för multiplikation, $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$, genom att välj tre olika naturliga tal och beräkna vänster och högerled var för sig.
2. Gör detsamma för distributiva lagen $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$
3. Distributiva lagen $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ säger att **multiplikation distribuerar över addition**.
Vad skulle det innebära att **addition distribuerar över multiplikation**? Och är det sant för naturliga tal?

Primtal

Definition

Ett naturligt tal $p \geq 2$ kallas ett **primtal** om p endast är jämnt delbart med 1 och sig självt.

Alternativ ekvivalent definition

Ett naturligt tal $p \geq 2$ är **primtal** om och endast om det inte finns några naturliga tal m och n , $1 < n, m < p$, sådana att $p = nm$.

Uppgift

Skriv upp de tio minsta primtalen

Primtal

Uppgift

Talet 12600 är inte primtal. Skriv talet 12600 som en produkt av primtal

Primtal

Sats

Varje naturligt tal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt (bortsett från faktorernas ordningsföljd).

Bevisas ej i denna kurs, återkommer i Diskret Matematik.

Exempel:

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$7 = 7$$

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Primtal

Uppgift

Avgör om 139 respektive 847 är primtal.

OBS: Om ett naturligt tal $n \geq 2$ inte är ett primtal måste det innehålla minst en primfaktor p sådan att $p \leq \sqrt{n}$.

Primtal

Det största primtal man känner till (maj 2022) är $2^{82\,589\,933} - 1$, ett tal som har cirka 25 miljoner siffror om man skriver ut det i bas tio.

Finns det ännu större, ännu okända, primtal?

Och hur många primtal finns det ?

Primtal

Sats

Det finns oändligt många primtal.

Beviset, som ni ska förstå och kunna genomföra, finns i en artikel länkad till dagens föreläsning, vi kommer också att gå igenom det på tavlan om en stund.

Primtal

Vi visat först med ett exempel den viktigaste byggstenen i beviset.

Exempel

Tag ett (ändligt) antal primtal vilka som helst, till exempel 2, 5, 11 och 19. Bilda talet n genom att ta produkten av dessa primtaltal och sedan addera 1 till produkten:

$$n = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1$$

Talet n kommer nu inte att innehålla någon av primfaktorerna du utgick ifrån. Till exempel är

$$\frac{n}{19} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19}{19} + \frac{1}{19} = 2 \cdot 5 \cdot 11 + \frac{1}{19}$$



Primtal

Exempel — fortsättning

Alltså innehåller talet n ingen av de primfaktor du hade valt, alltså är antingen n ett nytt primtal eller en produkt av andra primtal. I vårt fall är

$$2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1 = 2091 = n = 3 \cdot 17 \cdot 41$$

Primtal

Stolpar till bevis av det finns oändligt många primtal

Beviset är ett s k motsägelsebevis - vi antar motsatsen till vad vi vill bevisa, och visar att det leder till en motsägelse.

- Antag att det **inte** finns oändligt många primtal, då finns det ett tal N så att det finns precis N st primtal.
- Låt $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ vara en lista med alla primtalen.
- Bilda talet $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$
- n är inte delbart med något av alla primtalen $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ (jämför exemplet ovan).
- Alltså måste n vara ett nytt primtal som inte finns i listan, eller bestå av en produkt av primtal som inte finns i listan över de N primtalen. **MOTSÄGELSE!**



Lite mer om primtal

- Primtalssatsen
- Goldbachs förmodan
- Hypotesen om primtalstvillingar

Lite mer om primtal

Primtalssatsen (The prime number theorem)

Låt $\pi(n)$ vara antalet primtal mindre än eller lika med n , och låt $A(n) = \frac{\pi(n)}{n}$ vara andelen primtal bland de n första naturliga talen. Då gäller att

$$A(n) \approx \frac{1}{\ln n}, \quad \text{för stora tal } n.$$

Mer precist gäller att

$$\frac{A(n)}{1/\ln n} \rightarrow 1 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$

Beviset ingår inte i kursen, men du ska kunna och kunna tillämpa satsen.



Goldbachs förmodan (1742)

Varje jämnt tal större än två kan skrivas som summan av två primtal.

Med en förmodan menas ett påstående som man tror är sant men som inte är bevisat - man vet alltså inte om det är sant eller inte.

Primtal

Två närliggande udda tal som båda är primtal kallas **primtalstvillingar**, till exempel 3 och 5, 11 och 13 eller 17 och 19.

Talet är 23 däremot har ingen primtalstvilling eftersom varken 21 eller 25 är primtal.

Primtal

Två närliggande udda tal som båda är primtal kallas **primtalstvillingar**, till exempel 3 och 5, 11 och 13 eller 17 och 19.

Talet är 23 däremot har ingen primtalstvilling eftersom varken 21 eller 25 är primtal.

Hypotesen om primtalstvillingar

Det finns oändligt många par av primtalstvillingar, dvs det finns oändligt många tal p sådana att både p och $p + 2$ är primtal

Ordet *hypotes* har här samma betydelse som *förmodan*, dvs att det är ett obevisat påstående som man tror är sant