Fusionsplasmafysik
Skolan för Elektro- och Systemteknik
KTH, Teknikringen 29
Lorenzo Frassinetti

TENTAMEN

VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 14.00 - 18.00 onsdagen den 21 oktober 2022

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Tentamen består av åtta uppgifter:

- sex grundläggande uppgifter, ett problem för varje lärandemål (ILO)
- två mer avancerade uppgifter.

Varje utförd uppgift ger maximalt 3 poäng.
För att nå betyget E på tentamen måste studenten uppfylla alla sex lärandemål (ILO). Ett lärandemål uppfylls om studenten får minst 1,5 poäng på motsvarande uppgift på tentamen (eller blivit godkänd på motsvarande moment i den löpande examinationen).

BETYG	POÄNG
E	1.5 poäng för varje lärandemål (från motsvarande uppgifter i tentamen eller från löpande examination), svarande mot 9 poäng
D	som "E" men minst 12 poäng (=3 poäng mer än E) från valfria uppgifter i tentamen
C	som "E" men minst 15 (=6 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen
B	som "E" men minst 18 (=9 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från ett av de avancerade problemen
A	som "E" men minst 21 (=12 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från varje avancerat problem

Miniräknare är *ej tillåten*.
Tillåtet:

- "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (L. Råde och B. Westergren)
- Formelbladet med vektoralgebra + kroklinjiga koordinatsystem.

Lärare:

- Lorenzo Frassinetti
- Erik Saad
- Björn Zaar
- Hampus Nyström
- Laura Dittrich

GRUNDLÄGGANDE UPPGIFTER

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

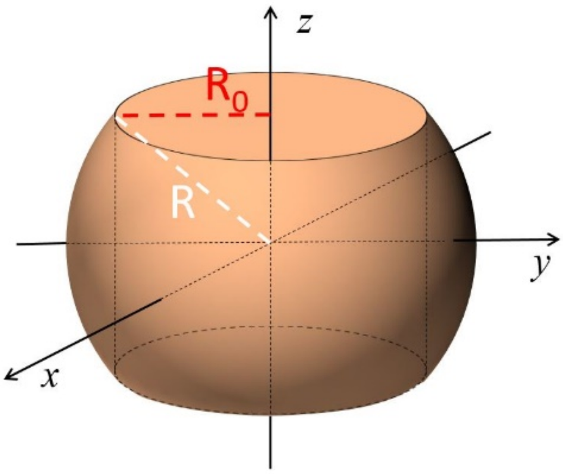
$\overline{E}(\overline{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars ortsvektor är $\overline{r}$. Fältets källa är en yta, S, med konstant laddningstäthet σ_0. Under dessa förutsättningar beräknas $\overline{E}(\overline{r})$ som:

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{(\overline{r}-\overline{r}')\sigma_0 dS'}{|\overline{r}-\overline{r}'|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\overline{r}'$ är en vektor från origo till dS',
- $\overline{r}$ är ortsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\overline{E}$).

Ytan är en del av en sfär med två hål i botten och toppen av sfären. Sfären har radie R och centrum i origo. Hålen är cirkulära, parallella med xy-planet och har radien R_0. Se figuren.



(a) Betrakta det elektriska fältet $\bar{E}$ **<u>längs *z*-axeln</u>.**
Uttryck dessa storheter anpassat till det givna problemets geometri:

dS' **(0,30p)**

$\bar{r}'$ **(0,30p)**

$\bar{r}$ **(0,30p)**

$|\bar{r} - \bar{r}'|$ **(0,60p)**

(b) Visa att $\bar{E} = \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}(zk_1 - Rk_2)\hat{e}_z$,
där $k_1$och k_2 är två integraler som är funktioner av z och R. **(1,25p)**

(c) Beräkna integralerna $k_1$och k_2.
Full poäng om du hittar den bästa metoden för att beräkna integralerna. **(0,25p)**

Tips:

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}, \qquad \int \frac{xdx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}}\right)$$

---

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

Betrakta vektorfältet $\bar{A}$ och den öppna ytan S som definieras av

$$\bar{A} = \frac{x}{y}\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y + \frac{z}{y}\hat{e}_z$$

$$S: \begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ \hat{e}_y \cdot \hat{n} \; > 0 \; i \; punkten \; P: (0,1,1) \end{cases}$$

(a) Skriv ner en parametrisering av ytan S. **(1.0 p)**

(b) Beräkna normalen till ytan S. **(0.8 p)**
Stämmer normalens orientering överens med definitionen av ytan? **(0.2 p)**

(c) Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{A}$ genom ytan S. **(1.0 p)**

---

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

Betrakta vektorfältet $\bar{A}$ och den öppna kurvan L som definieras av

$$\bar{A} = (y+z)\hat{e}_x + (x-z)\hat{e}_y + (y-x)\hat{e}_z$$

$$L: \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ x = 1 \\ z \geq 0 \\ tangentvektorn \; i \; punkten \; P: (1,-2,0) \; ges \; av \; \hat{t} = \hat{e}_z \end{cases}$$

(a) Beräkna rotationen av vektorfältet $\bar{A}$. **(0.25 p)**

(b) Kurvan L är inte sluten. Beskriv en strategi för att utnyttja Stokes sats för att beräkna $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$. **(0.25p)**

Rita en figur för att förklara din strategi. **(0.25p)**

(c) Använd strategin i (b) för att beräkna linjeintegralen $\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r}$ **(2.25p)**

---

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

(a) Visa att om skalärfältet ϕ är definierat i ett ortonormerat kroklinjigt koordinatsystem (u_1, u_2, u_3), med basvektorer $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ och $\hat{e}_3$ och skalfaktorer h_1, h_2 och h_3, kan gradienten i detta koordinatsystem skrivas

$$grad\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{e}_3$$ **(1.5 p)**

(b) Betrakta följande elektrostatiska potential V i cylindriska koordinater:

$$V = z\rho^2 \sin\varphi$$

- Beräkna det elektriska fältet $\bar{E} = -\nabla V$. **(0.75p)**
- Beräkna ökningen per längdenhet av den elektrostatiska potentialen i riktningen $\bar{n} = \hat{e}_\rho + 2\hat{e}_\varphi$. **(0.75p)**

---

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

(a) Använd indexräkning för att visa att:

$$\nabla \cdot \left(\phi\bar{A}\right) = \left(\nabla\phi\right) \cdot \bar{A} + \phi\nabla \cdot \bar{A}$$ **(1.5 p)**

(b) $\bar{B}$ är en konstant vektor och $\bar{r}$ är ortsvektorn. Använd identiteten ovan för att visa:

$$\nabla \cdot \left[\frac{(\bar{B}\cdot\bar{r})}{r^3}\bar{r}\right] = \bar{B} \cdot \frac{\hat{e}_r}{r^2}$$ **(1.5 p)**

---

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

En oändligt lång cylinder med radie R har laddningstätheten ρ_c:

$$\rho_c = 1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2$$

där ρ är avståndet från cylinderaxeln. Antag att potentialen på cylinderytan är V_0, att det elektrostatiska fältet på cylinderaxeln är noll och att det elektrostatiska fältet och elektrostatiska potentialen är kontinuerliga på cylinderytan.

Betrakta Poissons ekvation:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$ (där ε_0 är en konstant)

(a) Skriv ner Poissons ekvation genom att använda ett lämpligt koordinatsystem. **(0.3p)**

(b) Utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen. **(0.5p)**

(c) Använd ekvationen ovan för att beräkna den elektrostatiska potentialen V **och** det elektrostatiska fältet $\overline{E} = -\nabla V$:

- innanför cylindern, **(1.0p)**
- utanför cylindern. **(1.0p)**

(d) Rita ut potentialen och det elektriska fältet innanför och utanför cylindern. **(0.2p)**

AVANCERADE UPPGIFTER

---

(7) UPPGIFT 7

Betrakta vektorfältet $\bar{A} = \rho^2 \hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$ (som definieras i ett cylindriskt koordinatsystem) och den öppna halvsfären S som ges av:

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{A}$ genom S.

---

(8) UPPGIFT 8

Betrakta vektorfältet $\bar{A}$

$$\bar{A} = \frac{\nabla \times \left(\bar{r}\left(\bar{r} \cdot \hat{e}_\rho\right)\right)}{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z}$$

(där är $\bar{r}$ ortsvektorn, $\hat{e}_r$ definieras i ett sfäriskt koordinatsystem och $\hat{e}_\rho$ i ett cylindriskt koordinatsystem) och den slutna kurvan L som definieras av:

$$L: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \\ tangentvektorn\ i\ punkten\ P: (0, b, 0)\ ges\ av\ \hat{e}_x \end{cases}$$

(a) Förenkla $\bar{A}$ så långt som möjligt. **(1p)**
(b) Använd resultatet i (b) för att beräkna linjeintegralen av det förenklade vektorfältet över L. **(2p)**

SOLUTIONS

PROBLEM 1

(a)

$dS' = R^2 sin\theta' d\theta' d\varphi'$
$\bar{r}' = R\hat{e}_r$
$\bar{r} = z\hat{e}_z$
$\bar{r} - \bar{r}' = z\hat{e}_z - R\hat{e}_r$
$|\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z} = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zRcos\theta'}$
$|\bar{r} - \bar{r}'|^3 = r'^3$

(b)

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{(\bar{r} - \bar{r}')dS'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{z\hat{e}_z - R\hat{e}_r}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{\frac{3}{2}}} R^2 sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{z\hat{e}_z}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{\frac{3}{2}}} R^2 sin\theta' d\theta' d\varphi' - \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{R\hat{e}_r}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{\frac{3}{2}}} R^2 sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{sin\theta' d\theta' d\varphi'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} - \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\hat{e}_r}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{2\varepsilon_0}\underbrace{\int \frac{sin\theta' d\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}}}_{let's\ call\ this\ integral\ k_1} - \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\left(sin\theta' cos\varphi' \hat{e}_x + sin\theta' sin\varphi' \hat{e}_y + cos\theta' \hat{e}_z\right)}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} sin\theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{2\varepsilon_0} k_1 - \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_x \underbrace{\iint_S \frac{sin^2\theta' cos\varphi'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} d\theta' d\varphi'}_{let's\ call\ this\ integral\ k_3} - \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_y \underbrace{\iint_S \frac{sin^2\theta' sin\varphi'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} d\theta' d\varphi'}_{let's\ call\ this\ integral\ k_4}$$

$$- \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z \iint_S \frac{sin\theta' cos\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} d\theta' d\varphi' =$$

The boundary of integration for the variable φ is:

$\varphi: 0 \to 2\pi$ so, the integral $\int_0^{2\pi} cos\varphi' d\varphi' = 0$ and the integrals k_3 and k_4 are zero.

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{2\varepsilon_0} k_1 - \frac{\sigma_0 R^3}{4\pi\varepsilon_0}\hat{e}_z \iint_S \frac{sin\theta' cos\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{\frac{3}{2}}} d\theta' d\varphi'$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{2\varepsilon_0} k_1 - \frac{\sigma_0 R^3}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z \underbrace{\int \frac{sin\theta' cos\theta' d\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}}}_{let's\ call\ this\ integral\ k_2} =$$

$$= \frac{\sigma_0 R^2 z\hat{e}_z}{2\varepsilon_0} k_1 - \frac{\sigma_0 R^3}{2\varepsilon_0}\hat{e}_z k_2 = \frac{\sigma_0 R^2}{2\varepsilon_0}(zk_1 - Rk_2)\hat{e}_z$$

(c)

To calculate k1 and k2, you can do the substitution $x = cos\theta'$
So:

$x = cos\theta'$
$dx = -sin\theta' d\theta'$

$$k_1 = \int \frac{sin\theta' d\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} = -\int_{\sqrt{R^2-R_0^2}/R}^{-\sqrt{R^2-R_0^2}/R} \frac{dx}{(z^2 + R^2 - 2zRx)^{3/2}}$$

$$k_2 = \int \frac{sin\theta' cos\theta' d\theta'}{(z^2 + R^2 - 2zRcos\theta')^{3/2}} = -\int_{\sqrt{R^2-R_0^2}/R}^{-\sqrt{R^2-R_0^2}/R} \frac{xdx}{(z^2 + R^2 - 2zRx)^{3/2}}$$

The integrands can be found from integral tables.

PROBLEM 2

$$\bar{A} = \frac{x}{y}\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y + \frac{z}{y}\hat{e}_z$$

$$S: \begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ \hat{e}_y \cdot \hat{n} > 0 \; i \; punkten \; P: (0,1,1) \end{cases}$$

(a)

Skriv ner en parameterizering av ytan S.

$x = \rho cos\varphi$
$z = \rho sin\varphi$
$y = \rho^2$

$$\begin{cases} \bar{r}(\rho, \varphi) = \rho cos\varphi \hat{e}_x + \rho^2 \hat{e}_y + \rho sin\varphi \hat{e}_z \\ \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \\ \rho: 1 \rightarrow 2 \end{cases}$$

(b)

Beräkna normalen av ytan S och verifiera om normalens orientering överensstämma med definition av ytan.

$$d\bar{S} = \hat{n}dS = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) d\rho d\varphi$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \ cos\varphi \hat{e}_x + 2\rho\ \hat{e}_y + sin\varphi \hat{e}_z$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} = \ -\rho sin\varphi \hat{e}_x + \rho cos\varphi \hat{e}_z$$

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) = \ 2\rho^2 cos\varphi \hat{e}_x - \ \rho \hat{e}_y + 2\rho^2 sin\varphi \hat{e}_z$$

$$\hat{n}dS = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) d\rho d\varphi = \left(2\rho^2 cos\varphi \hat{e}_x - \ \rho \hat{e}_y + 2\rho^2 sin\varphi \hat{e}_z\right) d\rho d\varphi$$

$$\hat{n} = \frac{\left(2\rho^2 cos\varphi \hat{e}_x - \ \rho \hat{e}_y + 2\rho^2 sin\varphi \hat{e}_z\right)}{\sqrt{4\rho^4 cos^2\varphi + \ \rho^2 + 4\rho^4 sin^2\varphi}} = \frac{\left(2\rho\ cos\varphi \hat{e}_x - \ \hat{e}_y + 2\rho\ sin\varphi \hat{e}_z\right)}{\sqrt{8\rho^2 + \ 1}}$$

The y compomponent of the normal is negative, which is opposite to the definition of the surface. So, we will need to change sign to the integral.

(c)

Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{A}$ genom ytan S.

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = -\iint_S \bar{A} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) d\rho d\varphi$$

$$\bar{A}(\rho, \varphi) = \frac{cos\varphi}{\rho} \hat{e}_x + \rho^4 \hat{e}_y + \frac{sin\varphi}{\rho} \hat{e}_z$$

$$\bar{A} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{cos\varphi}{\rho} \hat{e}_x + \rho^4 \hat{e}_y + \frac{sin\varphi}{\rho} \hat{e}_z\right) \cdot \left(2\rho^2 cos\varphi \hat{e}_x - \ \rho \hat{e}_y + 2\rho^2 sin\varphi \hat{e}_z\right)$$
$$= \left(2\rho cos^2\varphi - \ \rho^5 + 2\rho sin^2\varphi\right) = 2\rho - \ \rho^5$$

$$\iint_S \bar{A} \cdot d\bar{S} = -\iint_S \bar{A} \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi}\right) d\rho d\varphi = -\int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(2\rho - \ \rho^5\right) d\varphi d\rho = -2\pi \int_1^2 \left(2\rho - \ \rho^5\right) d\rho$$
$$= -2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^6}{6}\right]_1^2$$
$$= -2\pi \left[4 - \ \frac{64}{6} - 1 + \frac{1}{6}\right] = 15\pi$$

PROBLEM 3

(a)

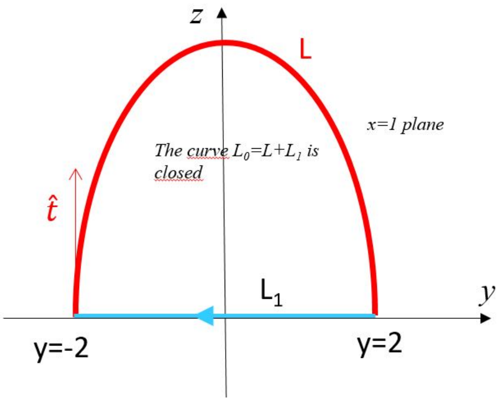
$\nabla \times \bar{A} = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$

(b)

The curve is not closed, so we cannot apply Stokes'theorem directly.But we can close the curve by adding a curve L_1 defined by the intersection between x=1 plane and the z=0 plane and from y=-2 to y=+2. The curve $L_0=L+L_1$ is close and can apply use the Stokes' thereom on L0.

$$\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} - \int_{L_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla\times\bar{A})\cdot d\bar{S} - \int_{L_1} \bar{A}\cdot d\bar{r}$$

Where S is half of the ellipses (at z>=0) on the x=1 plane. So it's normal is along the x-axis. Due to the direction of the tangent to L, using the right hand rule the normal to S is -$\hat{e}_x$.



(c)

$$\iint_S (\nabla\times\bar{A})\cdot d\bar{S} = -\iint_S \left(2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y\right)\cdot\hat{e}_x dS = -2\iint_S dS = -2\underbrace{\frac{(2x3)\pi}{2}}_{area\ of\ half\ ellipses} = -6\pi$$

Along L1, $d\bar{r} = dy\hat{e}_y$ and x=1, z=0

$$\int_{L_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_2^{-2} \left((y+z)\hat{e}_x + (x-z)\hat{e}_y + (y-x)\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_y\, dy = \int_2^{-2} (x-z)\, dy = \int_2^{-2} dy = -4$$

$$\int_L \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{L_0} \bar{A}\cdot d\bar{r} - \int_{L_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} = -6\pi + 4$$

PROBLEM 4

(a) See proof in the book.
(b)

$$V = z\rho^2 \sin\varphi$$

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z \\ &= \frac{\partial(z\rho^2 sin\varphi)}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(z\rho^2 sin\varphi)}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial(z\rho^2 sin\varphi)}{\partial z}\hat{e}_z \\ &= 2z\rho\, sin\varphi\hat{e}_\rho + z\rho\, cos\varphi\hat{e}_\varphi + \rho^2 sin\varphi\hat{e}_z\end{aligned}$$

$$\bar{E} = -\nabla V = -2z\rho\, sin\varphi\hat{e}_\rho - z\rho\, cos\varphi\hat{e}_\varphi - \rho^2 sin\varphi\hat{e}_z$$

The increase per unit length of a scalar field in the direction $\hat{n}$ is the directional derivative. So we have to caculate

$$\nabla V \cdot \hat{n}$$

Note that the direction must be normalized. So:

$$\nabla V \cdot \hat{n} = \left(2z\rho\, sin\varphi\hat{e}_\rho + z\rho\, cos\varphi\hat{e}_\varphi + \rho^2 sin\varphi\hat{e}_z\right) \cdot \frac{\hat{e}_\rho + 2\hat{e}_\varphi}{\sqrt{5}} = +2z\rho\, \frac{sin\varphi + cos\varphi}{\sqrt{5}}$$

PROBLEM 5

(a) Använd indexräkning för att visa att:

$$\nabla\cdot\left(\phi\bar{A}\right)=\nabla\phi\cdot\bar{A}+\phi\nabla\cdot\bar{A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\underbrace{\left(\phi\bar{A}\right)}_{\bar{v}}\\ \nabla\cdot\bar{v}=v_{i,i}\\ v_i=\left(\phi A\right)_i=\phi A_i\end{array}\right\}\Rightarrow\nabla\cdot\left(\phi\bar{A}\right)=\left(\phi\bar{A}\right)_{i,i}=\left(\phi A_i\right)_{,i}=\underbrace{\phi_{,\mathrm{i}}}_{(\nabla\phi)_{,i}}A_i+\phi A_{i,i}=\nabla\phi\cdot\bar{A}+\phi\nabla\cdot\bar{A}$$

(b) $\bar{B}$ är en konstant vektor och $\bar{r}$ är ortsvektorn. Använd identitet ovan för att visa:

$$\nabla\cdot\left[\frac{(\bar{B}\cdot\bar{r})}{r^3}\bar{r}\right]=\bar{B}\cdot\frac{\hat{e}_r}{r^2}$$

$$\nabla\cdot\left[\frac{(\bar{B}\cdot\bar{r})}{r^3}\bar{r}\right]=\nabla(\bar{B}\cdot\bar{r})\cdot\frac{\bar{r}}{r^3}+(\bar{B}\cdot\bar{r})\nabla\cdot\left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)=\bar{B}\cdot\frac{\hat{e}_r}{r^2}$$

because

$$\nabla(\bar{B}\cdot\bar{r})=\nabla\left(B_x x+B_y y+B_z z\right)=\frac{\partial\left(B_x x+B_y y+B_z z\right)}{\partial x}\hat{e}_x+$$
$$+\frac{\partial\left(B_x x+B_y y+B_z z\right)}{\partial y}\hat{e}_y+\frac{\partial\left(B_x x+B_y y+B_z z\right)}{\partial z}\hat{e}_z=\left(B_x\hat{e}_x+B_y\hat{e}_x+B_z\hat{e}_x\right)=\bar{B}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{r\hat{e}_r}{r^3}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right)=\frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 sin\theta\frac{1}{r^2}\right)\right]=0$$

PROBLEM 6

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E} = -\nabla V \,.$$

Due to the symmetry of the problem and due to the expression for the charge density, the solution will depend only on ρ. Therefore, the derivatives in *z* and *phi* of the Laplacian are zero. So, if we express the Laplacian in a cylindrical coordinate system, expression (14.4), we obtain

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}_{=0} = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

And for the electric field, using (10.43) for the gradient in cylindrical coordinates, we have

$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial V}{\partial\varphi}}_{=0}\hat{e}_\varphi - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{=0}\hat{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho$$

So, we have to solve the equation

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

We start to solve the equation inside the cylinder.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{\rho^2}{R^2}\right) \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho+\frac{\rho^3}{R^2}\right) \Rightarrow \left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4R^2}\right)+k$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^3}{4R^2}\right)+\frac{k}{\rho}$$

The electric field inside the cylinder is

$$\bar{E} = -\frac{dV}{d\rho}\hat{e}_\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^3}{4R^2}\right)\hat{e}_\rho - \frac{k}{\rho}\hat{e}_\rho$$

On the cylinder axis, the field must be zero. Se we have *k=0*.
Now we can continue to solve the Poisson equation. Integrating in ρ we obtain,

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^3}{4R^2}\right) \Rightarrow V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho^4}{16R^2}\right)+a$$

Therefore, inside the cylinder the potential and the field are

$$V_{in} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho^4}{16R^2}\right)+a$$

$$\bar{E}_{in} = -\frac{dV}{d\rho}\hat{e}_\rho = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^3}{4R^2}\right)\hat{e}_\rho$$

Outside the cylinder, the charge density is zero, so we are left with the Laplace equation in cylindrical symmetry. We already know from Section 17.2, expression (17.10) that in this case the solution is

$$V_{out}(\rho) = c\ln\rho + d$$

The electric field is

$$\bar{E}_{out} = -\frac{\partial V}{\partial\rho}\hat{e}_\rho = -\frac{c}{\rho}\hat{e}_\rho$$

Now we need to find the integration constants *a, c and d*. We have three conditions to use.

(1) Continuity of the electric field at $\rho = R$

$$\bar{E}_{in}(R) = \bar{E}_{out}(R)$$

(2) The value of the electrostatic potential at $\rho = R$

$V_{in}(R) = V_0$

(3) Continuity of the potential at $\rho = R$

$V_{in}(R) = V_{out}(R)$

These three conditions lead to a system of three equations in the three unknown *a, c and d*,

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{2}+\frac{R^3}{4R^2}\right) = -\frac{c}{R} \Rightarrow c = -\frac{3R^2}{4\varepsilon_0}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{4}+\frac{R^4}{16R^2}\right) + a = V_0 \Rightarrow a = V_0 + \frac{5R^2}{16\varepsilon_0}$$
$$V_0 = -\frac{3R^2}{4\varepsilon_0} lnR + d \Rightarrow d = V_0 + \frac{3R^2}{4\varepsilon_0} lnR$$

Finally, inserting these three expressions in to the expressions of the electric field and potential, we obtain

$$V_{in} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho^4}{16R^2}\right) + V_0 + \frac{5R^2}{16\varepsilon_0} = V_0 + \frac{R^4}{\varepsilon_0}\left(\frac{5}{16}-\frac{\rho^2}{4R^2}-\frac{\rho^4}{16R^4}\right)$$
$$\bar{E}_{in} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho^3}{4R^2}\right)\hat{e}_\rho$$

$$V_{out} = V_0 - \frac{3R^2}{4\varepsilon_0} ln\frac{\rho}{R}$$

$$\bar{E}_{out} = \frac{3R^2}{4\varepsilon_0 \rho}\hat{e}_\rho$$

PROBLEM 7

The field is continuous, but the surface is open, so we cannot apply the Gauss' theorem directly. We could do a parameterization of the surface, but the surface is a sphere while the field is in cylindrical coordinate system, so we would get a non trivial integral (but it could work).

I prefer to close the half sphere with a circle S_0 that lies on the z=0 plane. So, the surface $S+S_0$ is closed.

$$\iint_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iint_{S+S_0-S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iint_{S+S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S} - \iint_{S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iiint_V \nabla\cdot\bar{A}dV - \iint_{S_0} \bar{A}\cdot d\bar{S}$$

$$\nabla\cdot\bar{A} = \nabla\cdot\left(\rho^2\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho\left(\rho^2\right)}{\partial\rho} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3\rho + 1$$

Note that $\rho = rsin\theta$

$$\iiint_V \nabla\cdot\bar{A}dV = \iiint_V (3\rho+1)r^2 sin\theta drd\theta d\varphi = \iiint_V (3rsin\theta+1)r^2 sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$= \iiint_V (3r^3sin^2\theta + r^2sin\theta)drd\theta d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^R (3r^3sin^2\theta + r^2sin\theta)drd\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3R^4}{4}sin^2\theta + \frac{R^3}{3}sin\theta\right)d\theta = 2\pi\left[\frac{3R^4}{4}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{sin2\theta}{4}\right) - \frac{R^3}{3}cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi\left(\frac{3\pi R^4}{16}+\frac{R^3}{3}\right)$$

$$\iint_{S_0}\bar{A}\cdot d\bar{S} = -\iint_{S_0}\left(\rho^2\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z\right)\cdot\hat{e}_z dS = \underbrace{-\iint_{S_0} zdS = 0}_{\substack{because\ we\ are\\ in\ the\ plane\ z=0}}$$

$$\iint_S \bar{A}\cdot d\bar{S} = \iiint_V \nabla\cdot\bar{A}dV - \iint_{S_0}\bar{A}\cdot d\bar{S} = 2\pi\left(\frac{3R^4}{16}+\frac{R^3}{3}\right)$$

PROBLEM 8

$$\bar{A} = \frac{\nabla\times\left(\bar{r}\left(\bar{r}\cdot\hat{e}_\rho\right)\right)}{\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z}$$

$$\bar{r}\cdot\hat{e}_r = r$$
$$\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z = cos\theta$$

$$\nabla\times\left(\bar{r}\left(\bar{r}\cdot\hat{e}_\rho\right)\right) = \left(\bar{r}\cdot\hat{e}_\rho\right)\underbrace{(\nabla\times\bar{r})}_{=0} - \bar{r}\times\nabla\underbrace{\left(\bar{r}\cdot\hat{e}_\rho\right)}_{=rsin\theta} = -\bar{r}\times\nabla(rsin\theta) =$$

$$= -\bar{r}\times(sin\theta\hat{e}_r + cos\theta\hat{e}_\theta) = -rcos\theta\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta = -rcos\theta\hat{e}_\varphi$$

$$\bar{A} = \frac{-rcos\theta\hat{e}_\varphi}{cos\theta} = -r\,\hat{e}_\varphi$$

The we calculate the curl in a spherical coordinate system:

$$\nabla\times\bar{A} = \nabla\times\left(-r\,\hat{e}_\varphi\right) = -\frac{cos\theta}{sin\theta}\hat{e}_r + 2\hat{e}_\theta$$

But we are on the z=0 plane, where $\theta = \frac{\pi}{2}$. So the curl becomes:

$$\nabla\times\bar{A} = -\frac{\overbrace{cos\theta}^{=0}}{sin\theta}\hat{e}_r + 2\hat{e}_\theta = 2\hat{e}_\theta =$$

$$= 2\left(\underbrace{cos\theta}_{=0} cos\varphi\hat{e}_x + \underbrace{cos\theta}_{=0} sin\varphi\hat{e}_y - \underbrace{sin\theta}_{=1} \hat{e}_z\right) = -2\hat{e}_z$$

The simplified vector field is continuous and has continuous derivative inside the ellipses on the z=0 plane and with boundary on L, so we can use the Stokes' theorem:

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S} = -2 \iint_S \hat{e}_z \cdot (-\hat{e}_z) dS = 2 \iint_S dS = 2\pi ab$$