

VEKTORANALYS

HT 2022

Övningar:

gradienten,

grundläggande begrepp och

parametrisering av kurvor och ytor

Kursvecka 1

Kapitel 1-5 (*Vektoranalys*, 1:a uppl., Frassinetti/Scheffel)



PROBLEM 1

Beräkna gradienten av följande skalärfält:

$$\phi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

(a) I vilken riktning ökar ϕ mest i punkten P: $(-1, 1)$?

(b) Vad är den maximala ökningen i punkten P: $(-1, 1)$?

LÖSNING till problem 1

(a) Riktningen i vilken skalärfältet ökar mest ges av gradientens riktning (*sats 4.1*)

$$\text{grad } \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)})$$

$$\text{I P har vi: } \text{grad } \phi = -2e^{-((-1)^2+1^2)}(-1, 1) = -2e^{-2}(-1, 1)$$

$$\text{Riktningen är: } \hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

(b) Den maximala ökningen i P ges av beloppet av gradienten i P (*sats 4.1*)

$$|\text{grad } \phi| = |-2e^{-2}(-1, 1)| = 2\sqrt{2}e^{-2}$$

PROBLEM 2

Betrakta skalärfältet: $f(x, y) = xy + x^2$

(a) Beräkna gradienten av $f(x, y)$

(b) Beräkna riktningsderivatan df/ds i punkten P : $(1,2)$ om riktningen är: $\vec{d} = (1,1)$

LÖSNING till problem 2

(a) Använd definitionen av gradienten (s. 75 i Vektoranalys, Frassinetti/Scheffel, ekv. 4.3)

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (y + 2x, x).$$

(b) I punkten P är gradienten: $\text{grad } f|_P = (2 + 2 \cdot 1, 1) = (4, 1)$

Definitionen av riktningsderivatan är (s. 75, ekv. 4.5): $\frac{df}{ds} = \text{grad } f \cdot \hat{d}$

Observera att riktningen måste vara normaliserad: $\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Insättning i punkten P ger: $\frac{df}{ds}|_P = \text{grad } f|_P \cdot \hat{d} = (4,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 + 1) = \frac{5}{\sqrt{2}}$

PROBLEM 3

(a) Hitta en enkel parametrisk beskrivning $\vec{r} = \vec{r}(u)$ av kurvan:

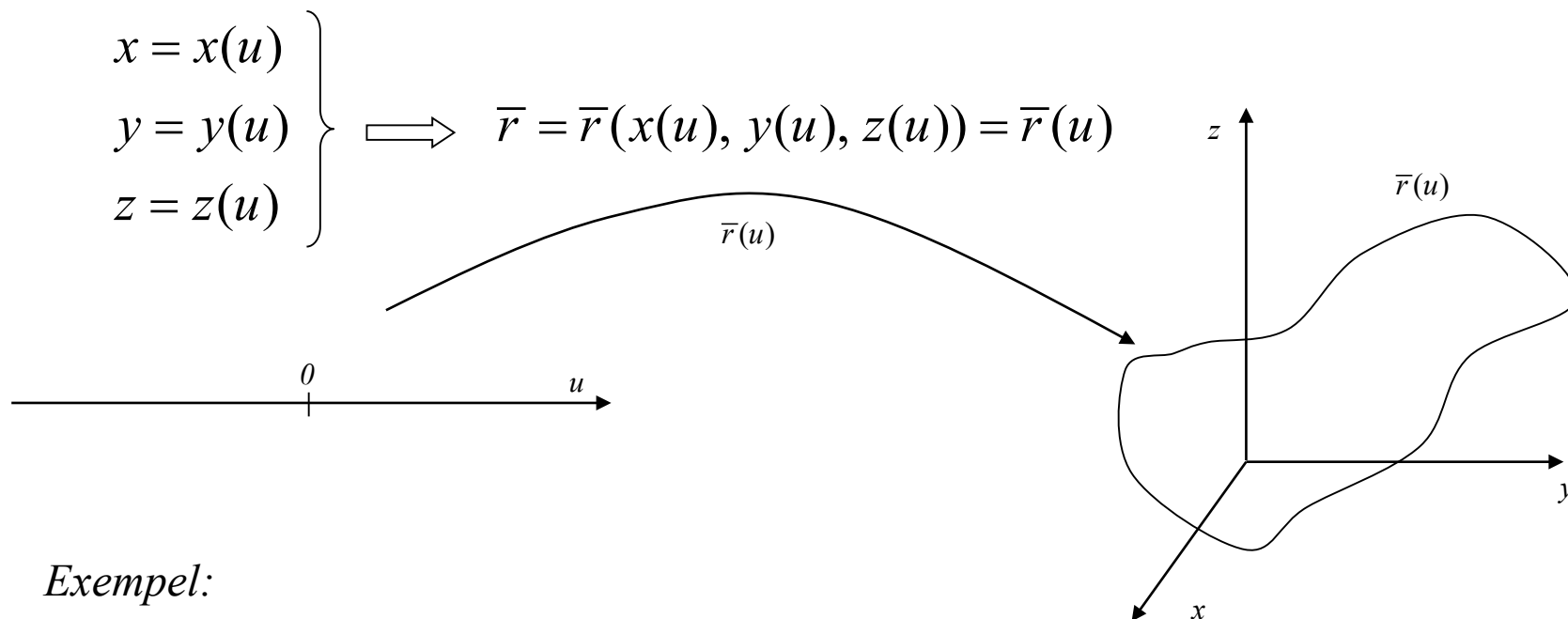
$$\begin{cases} 4x - y^2 = 0, & (1) \\ x^2 + y^2 - z = 0, & (2) \end{cases}$$

Från punkten (0,0,0) till punkten (1,2,5)

(b) Beräkna vektortangenten till kurvan i punkten $P: \left(\frac{1}{4}, 1, \frac{17}{16}\right)$

LÖSNING till problem 3 (del a)

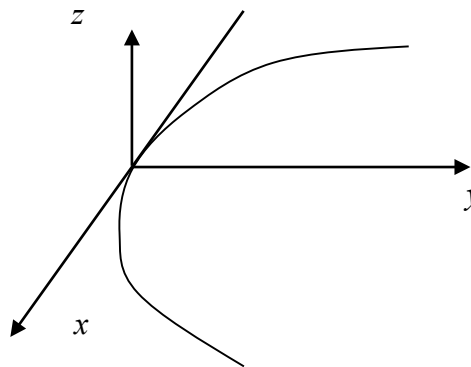
En “parametrisering” betyder att vi måste introducera en ny variabel (till exempel u). De “gamla” variablerna x , y och z kommer att bero på u .



Exempel:

$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = u^2 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{r}(u) = (u, u^2, 0)$$

En parabel i xy-planet



LÖSNING till problem 3 (del a)

kurvan:

$$\begin{cases} 4x - y^2 = 0, & (1) \\ x^2 + y^2 - z = 0, & (2) \end{cases}$$

från punkten (0,0,0) till punkten (1,2,5)

Till exempel kan vi välja $u = y$

$$\text{Från ekvation (1)} \Rightarrow u^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{u^2}{4}$$

$$\text{Från ekvation (2)} \Rightarrow z = x^2 + y^2 = \frac{u^4}{16} + u^2$$

$$\text{Så att vi får} \quad \vec{r}(u) = \left(\frac{u^2}{4}, u, \frac{u^4}{16} + u^2 \right)$$

Från punkten (0,0,0) till punkten (1,2,5)

$$(0,0,0) \Rightarrow u = 0$$

$$(1,2,5) \Rightarrow u = 2$$

Den parametriserade kurvan blir:

$$\vec{r}(u) = \left(\frac{u^2}{4}, u, \frac{u^4}{16} + u^2 \right)$$
$$u: 0 \rightarrow 2$$

LÖSNING till problem 3 (del b)

Tangentvektorn i en punkt ges av derivatan (med avseende på parametern u) i den punkten

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{du} = \left(\frac{2u}{4}, 1, \frac{4u^3}{16} + 2u \right) = \left(\frac{u}{2}, 1, \frac{u^3}{4} + 2u \right)$$

Tangenten måste beräknas i punkten $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{17}{16} \right)$

Eftersom $u = y$, har vi $u = 1$

Alltså får vi:

$$\vec{t} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4} + 2 \right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{4} \right)$$

PROBLEM 4

Consider the following surface:

$$x^2 - 2y^2 - 2z = 0 \quad (1)$$

Calculate:

- (A) The equations of the normal line to the surface in the point $P (2,1,1)$
- (B) The equation of the tangent plane to the surface in the point P

SOLUTION to problem 4 (part A)

A normal line is a line that intersects the surface in the point. The direction of the line is perpendicular to the surface.

How to calculate the direction perpendicular to a surface?

Theorem 4.2 (in Frassinetti/Scheffel): The gradient of a scalar field $\phi(x,y,z)$ in the point P is orthogonal to the level surface $\phi=c$ in P.

Consider the level surface $\phi = x^2 - 2y^2 - 2z = 0$

The normal line is parallel to the gradient

$$\text{grad} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (2x, -4y, -2)$$

$$\text{In } P(2,1,1) \quad \text{grad} \phi = (4, -4, -2)$$

The direction of the normal line is: $\bar{n}_P = (4, -4, -2)$

The equation of the normal line is: $\bar{r}(u) = (2,1,1) + (4,-4,-2)u = (4u+2, -4u+1, -2u+1)$

SOLUTION to problem 4 (part B)

A tangent plane is a plane that is parallel to the surface in the point.

From “*basic*” geometry, given a vector $\vec{v} = (A, B, C)$

Then the plane $Ax + By + Cz + D = 0$ is perpendicular to $\vec{v}$

Therefore, using $\vec{v} = \vec{n}_P = (4, -4, -2)$

we have that the plane $4x - 4y - 2z + D = 0$ is perpendicular to $\vec{n}_P$

D is chosen in order that the plane passes through the point $P (2, 1, 1)$:

$$4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2$$

$2x - 2y - z - 1 = 0$ passes through P and is tangent to the surface

PROBLEM 5

Write a parameterization of the following surface

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y < 2 \end{cases}$$

SOLUTION to problem 5

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \\ y = x^2 + z^2 = \rho^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho^2, \rho \sin \theta) \quad \text{and} \quad \begin{cases} \theta : 0 \rightarrow 2\pi \\ \rho : 0 \rightarrow \sqrt{2} \end{cases}$$

PROBLEM 6

Write a parameterization of the following curve

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

SOLUTION to problem 6

$$\begin{cases} x = 2 \cos \varphi \\ y = 4 \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{r}(\varphi) = (2 \cos \varphi, 4 \sin \varphi, 0) \quad \text{and} \quad \varphi : 0 \rightarrow \pi$$

PROBLEM 7

Write a parameterization of the following surface

$$z = xy$$

SOLUTION to problem 7

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{r}(u, v) = (u, v, uv)$$

PROBLEM 8

Write a parameterization of the curve defined by:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

from point $P_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$ till point $P_1 (0, 0, 1)$

(the coordinates of the points are given in a cartesian coordinate system)

SOLUTION to problem 8

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad \vec{r}(\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \cos \theta \right) \quad \begin{matrix} \text{in } P_0 & z = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ \text{in } P_1 & z = 1 \Rightarrow \theta = 0 \end{matrix} \Rightarrow \quad \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

PROBLEM 9

Kraften på en ledare L med den elektriska strömmen I , i det magnetiska fältet är:

$$\vec{F} = I \int_L \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

Beräkna kraften på en cirkulär strömslinga L (radie R och centrum i origo). L ligger i xy -planet ($z=0$) och omsluter z -axeln en gång. Magnetiska fältet $\vec{B}$ definieras i cylinderkoordinater:

$$\vec{B} = B_0 \rho \left(\cos \varphi \hat{e}_z + \sin \varphi \hat{e}_\varphi \right)$$

Använd följande steg:

(a) uttryck $d\vec{l}$ i ett cylindriskt koordinatsystem

(b) beräkna $d\vec{l} \times \vec{B}$ i ett cylindriskt koordinatsystem

(c) integrera och beräkna $\vec{F}$ (Du kan här använda ett kartesiskt koord-system)

SOLUTION to problem 9

$$d\vec{l} = \rho d\varphi \hat{e}_\varphi$$

$$d\vec{l} \times \vec{B} = \rho d\varphi \hat{e}_\varphi \times B_0 \rho (\cos \varphi \hat{e}_z + \sin \varphi \hat{e}_\varphi) = B_0 \rho^2 \cos \varphi d\varphi \hat{e}_\rho$$

$$\vec{F} = I \int_0^{2\pi} B_0 \rho^2 \cos \varphi d\varphi \hat{e}_\rho = IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \hat{e}_\rho d\varphi =$$

$$= IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) d\varphi =$$

$$IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \hat{e}_x d\varphi + \underbrace{IB_0 R^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \hat{e}_y d\varphi}_{=0} = IB_0 R^2 \hat{e}_x \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= IB_0 R^2 \hat{e}_x \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = IB_0 R^2 \pi \hat{e}_x$$

PROBLEM 10

The scalar fields f , g , h are given by:

$$f(\bar{r}) = 2xy - y^2z^2 + 2xz$$

$$g(\bar{r}) = x^3y + y^3z - xz^3$$

$$h(\bar{r}) = x^3y^2z + x^2yz^3 + xy^3z^2$$

- (a) Calculate the direction $\hat{n}$ for which the directional derivative of f and g in the point $P(-1,0,1)$ is zero simultaneously
- (b) Calculate the directional derivative of h in P along the direction $\hat{n}$

SOLUTION

- (a) The directional derivative of the scalar field ϕ in the direction $\hat{n}$ is:

$$\frac{d\phi}{ds} = \text{grad}\phi \cdot \hat{n}$$

Therefore, we need to find the direction $\hat{n}$ for which:

$$\begin{cases} \text{grad}(f) \cdot \hat{n} = 0 \\ \text{grad}(g) \cdot \hat{n} = 0 \end{cases}$$

Let's calculate the gradient of f and g :

$$\text{grad } f = (2y + 2z, 2x - 2yz^2, -2y^2z + 2x)$$

$$\text{grad } g = (3x^2y - z^3, x^3 + 3y^2z, y^3 - 3xz^2)$$

In the point P $(-1,0,1)$ the gradients are:

$$(\text{grad } f)_P = (2, -2, -2)$$

$$(\text{grad } g)_P = (-1, -1, 3)$$

If $\hat{n} = (a, b, c)$ we obtain:

$$(\text{grad } f)_P \cdot \hat{n} = (2, -2, -2) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$(\text{grad } g)_P \cdot \hat{n} = (-1, -1, 3) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a - b - c = 0 \\ a + b - 3c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = c \end{cases}$$

Therefore: $\hat{n} = (2c, c, c)$

Normalizing: $\hat{n} = \frac{(2, 1, 1)}{\sqrt{6}}$

(b) The directional derivative of the h in the direction $\hat{n}$ in the point P is:

$$\left(\frac{dh}{ds} \right)_P = (\text{grad } h)_P \cdot \hat{n} = (0, 1, 0) \cdot \frac{(2, 1, 1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

PROBLEM 11 (from HT2019 tenta)

$\vec{E}(\vec{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars Ortsvektor är $\vec{r}$. Fältets källa är en yta, S , med konstant laddningstäthet σ_0 .

Under dessa förutsättningar beräknas $\vec{E}(\vec{r})$ som:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \sigma_0 dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

där

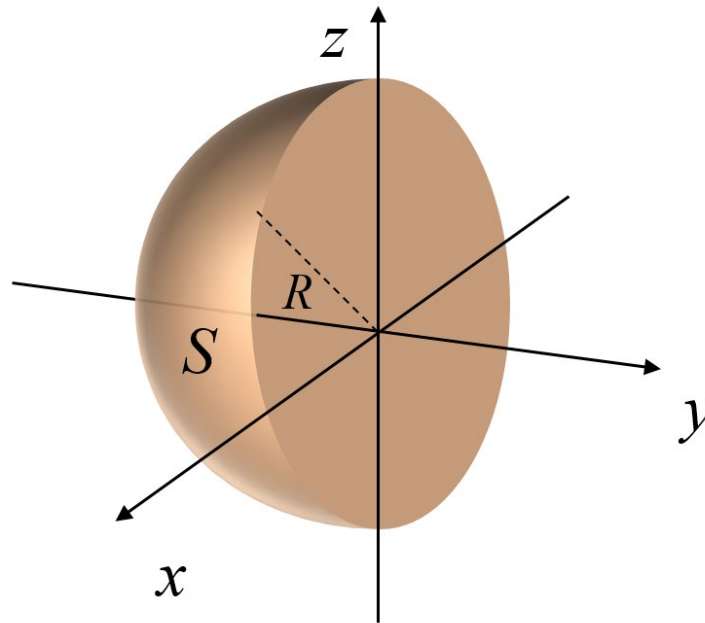
dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)

$\vec{r}'$ är en vektor från origo till dS' ,

$\vec{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\vec{E}$)

Betrakta den öppna ytan S som definieras som en halv sfär ($y \leq 0$) med radie R och som har centrum i origo. Se figur.

Beräkna elektriska fältet i origo



SOLUTION

First we can rotate the coordinate system to have the base of the surface on the xy leave at $z>0$ (at the end we need to remember to go back to the original coordinate system)

$$dS' = r'^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{r}' = r' \hat{e}_r$$

$$\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r' \hat{e}_r$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = r'^3$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\sigma_0 dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\hat{e}_r r'^3 \sin\theta d\theta d\varphi}{r'^3} = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta (\sin\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z) d\theta d\varphi = \right. \\ & = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\sin^2\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \sin^2\theta \sin\varphi \hat{e}_y + \sin\theta \cos\theta \hat{e}_z) d\theta d\varphi = \\ & = \hat{e}_x \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^2\theta \cos\varphi d\theta d\varphi}_{=0} + \hat{e}_y \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin^2\theta \sin\varphi d\theta d\varphi}_{=0} + \hat{e}_z \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi = 2\pi \hat{e}_z \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin\theta \cos\theta d\theta = \pi \hat{e}_z [\sin^2\theta]_{\theta_0}^{\theta_1} \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \hat{e}_r \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \pi \hat{e}_z \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \pi \hat{e}_z$$

Finally, we need to go back to the original coordinate system. The final result is: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \pi \hat{e}_y$