



EXAMPLE OF THE STRUCTURE OF TENTA FOR HT2022 (ED1110).

The first six problems in the actual tenta might be slightly more advanced (or slightly easier) than the examples given here.

The last two problems can be considered as a good example of what we mean with “avancerade uppgifter”.

TENTAMEN VEKTORANALYS

ED1110 Vektoranalys

kl. 14.00 - 18.00 onsdagen den 20 oktober 2020

Anteckna namn, utbildningsprogram, årskurs och problemnummer på varje blad.

Tentamen består av åtta uppgifter:

- sex grundläggande uppgifter, ett problem för varje lärandemål (ILO)
- två mer avancerade uppgifter.

Varje utförd uppgift ger maximalt 3 p.

För att nå betyget E på tentamen måste studenten uppfylla alla sex lärandemål (ILO). Ett lärandemål uppfylls om studenten får minst 1,5 poäng på motsvarande uppgift på tentamen (eller blivit godkänd på motsvarande moment i den löpande examinationen).

BETYG	POÄNG
E	1.5 poäng för varje lärandemål (från motsvarande uppgifter i tentamen eller från löpande examination), svarande mot 9 poäng
D	som “E” men minst 12 poäng (=3 poäng mer än E) från valfria uppgifter i tentamen
C	som “E” men minst 15 (=6 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen
B	som “E” men minst 18 (=9 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från ett av de avancerade problemen
A	som “E” men minst 21 (=12 poäng mer än E) poäng från valfria uppgifter i tentamen varav minst 2 poäng från varje avancerat problem

Miniräknare är *ej tillåten*.

Tillåtet:

- ”Mathematics Handbook for Science and Engineering” (L. Råde och B. Westergren)
- vektoralgebra + kroklinjiga koord-system formler.

Lärare:

- Lorenzo Frassinetti
- Pablo Vallejos Olivares
- Kristoffer Lindvall
- Erik Saad
- Björn Ljungberg

GRUNDLÄGGANDE UPPGIFTER

(1) UPPGIFT 1: Lärandemål 1 (ILO 1)

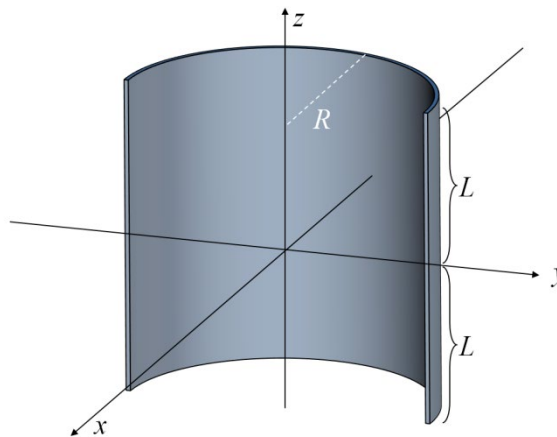
$\vec{E}(\vec{r})$ är det elektriska fältet i en punkt vars Ortsvektor är $\vec{r}$. Fältets källa är en yta, S , med konstant laddningstäthet σ_0 . Under dessa förutsättningar beräknas $\vec{E}(\vec{r})$ som:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \sigma_0 dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

där

- dS' är ett infinitesimalt ytelement på S (skalärt, ej riktat)
- $\vec{r}'$ är en vektor från origo till dS' ,
- $\vec{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\vec{E}$).

Ytan är en halv cylinder med radie R och höjd $2L$. Halvcylindern har axeln riktad längs z -axeln. Halvcylindern definieras som $x \leq 0$. Se figur.



Beräkna elektriska fältet $\vec{E}$ i origo.

Tips:
$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + c$$

(2) UPPGIFT 2: Lärandemål 2 (ILO 2)

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\vec{A} = z\hat{e}_z$$

genom den öppna ytan S .

$$S: \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \\ y \leq 1 \\ z \geq 0 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y \geq 0 \end{cases}$$

Notera att planen $y=1$ och $z=0$ inte ingår i S . Villkoren på y och z anger endast var S avgränsas.

(3) UPPGIFT 3: Lärandemål 3 (ILO 3)

Betrakta Stokes sats.

- (a) Bevisa satsen (för enkelhet, anta att banan L och ytan S ligger på xy -planet). (2.5 p)
- (b) Beräkna cirkulationen av vektorfältet $\vec{A} = r^2 \hat{e}_r$ (definierat i ett sfäriskt koordinatsystem) längs en sluten kurva L (vars form är okänd). (0.25p)
- (c) Förklara i ord resultatet från (b). (0.25p)

(4) UPPGIFT 4: Lärandemål 4 (ILO 4)

Betrakta följande elektrostatiske potential V i sfäriska koordinater:

$$V = r^2 \sin \theta \sin \varphi$$

- (a) Beräkna elektriska fältet $\vec{E} = -\nabla V$. (1.5 p)
- (b) Beräkna ökningen per längdenhet av elektrostatiske potentialen i riktningen $\vec{n} = \hat{e}_r + 2\hat{e}_\theta$. (1.5 p)

(5) UPPGIFT 5: Lärandemål 5 (ILO 5)

- (a) Använd indexräkning för att visa att:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.5 \text{ p})$$

Tips: $(\nabla^2 \vec{A})_i = \partial_j \partial_j A_i$ eller $(\nabla^2 \vec{A})_i = A_{i,jj} = (A_{i,j})_{,j}$

- (b) Betrakta vektorfältet (i ett sfäriskt koordinatsystem):

$$\bar{A} = \frac{1}{r} \hat{e}_r \cos(kr + \alpha)$$

där k och α är konstanta skalärer.

Använd 3(a) för att visa:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\frac{2+k^2 r^2}{r^2} \bar{A}. \quad (1.5 \text{ p})$$

(6) UPPGIFT 6: Lärandemål 6 (ILO 6)

En sfär med radie r_0 har laddningstätheten: $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha$ med $\alpha > 0$.

Utanför sfären är laddningstätheten lika med noll.

(a) Betrakta Poissons ekvation: $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (där ϵ_0 är en konstant)

- skriv ner Poissons ekvation genom att använda ett lämpligt koordinatsystem.

(0.3p)

- utnyttja problemets symmetri för att förenkla ekvationen.

(0.5p)

(b) Använd ekvationen ovan för att beräkna:

- elektrostatiska potentialen ϕ innanför och utanför sfären.

(1.0p)

- elektriska fältet $\bar{E}$ innanför och utanför sfären.

(1.0p)

(c) Rita ut potentialen och elektriska fältet innanför och utanför sfären.

(0.2p)

AVANCERADE UPPGIFTER

(7) UPPGIFT 7

Betrakta vektorfältet $\vec{A} = (\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{b}$ med $\vec{a}$ och $\vec{b}$ två konstanta vektorer och med $\vec{r}$ Ortsvektorn. Bevisa att

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = -3\pi (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \hat{e}_z$$

där L är en ellips som ligger i xy -planet, med centrum i origo, storradie 3 längs y -axeln och lillradie 1 längs x -axeln. I punkten $x=0, y=3, z=0$ har L tangentvektor $\hat{e}_x$.

(8) UPPGIFT 8

Beräkna flödet $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ av vektorfältet $\vec{A}$ genom ytan S , där S är ytan av en ellipsoid med **centrum i origo** och med radier $a = 6$, $b = 4$, $c = 4$. Riktningarna för ellipsoidens tre axlar är okända. Vektorfältet definieras av:

$$\vec{A} = \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}} + y^2 \right)$$
