Fx-skrivning 2 – Maj 2022 – Lösningar

1. Logik. De logiska konnektiven $\wedge$, $\vee$ och $\neg$ hänger ihop med logiska grindar i digitaltekniken. Vi har ju och-grindar, eller-grindar och inverteringsgrindar. Ett annat logiskt konnektiv som kallas *Scheffers streck* som skrivs med $|$ definieras som

$$p|q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

som kan sägas motsvara en NAND-grind ("Not-And"). Konnektiv kan ibland skrivas om med andra konnektiv och definitionen ovan anger hur Scheffers streck skrivs om med negation och konjunktion. DeMorgans lagar kan sägas ange hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion respektive hur konjunktion kan skrivas om med negation och disjunktion enligt

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Scheffers streck har den säregna egenskapen att vi kan skriva om en utsaga som innehåller olika konnektiv till en ny ekvivalent utsaga som *bara* innehåller Scheffers streck, alltså inga konjunktioner, inga disjunktioner, inga negationer, bara Scheffers streck och förstås parenteser. Skriv om följande utsaga genom att bara använda Scheffers streck och parenteser:

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$$

Ledning: Börja med att skriva om de grundläggande utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\neg p$ med endast Scheffers streck och parenteser. Till exempel har vi $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p|p$. När du vet hur du skriver om dessa grundläggande utsagor så kan du använda det på den stora utsagan ovan. Parenteser är förstås acceptabla och faktiskt kommer det att bli *många* parenteser i svaret.

Lösning: Vi har

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg p \Leftrightarrow (p|q) \vee \neg p \Leftrightarrow$$

$$\neg(\neg(p|q) \wedge p) \Leftrightarrow (\neg(p|q)|p) \Leftrightarrow (((p|q)|(p|q))|p)$$

2. Mängdlära. Vi betecknar som vanligt med $A \oplus B$ den symmetriska differensen mellan mängderna A, B som mängden $(A - B) \cup (B - A)$. De distributiva lagarna vore bra om de gällde. De kan formuleras

1. $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$,
2. $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$.

Problemet är bara att ingen av dessa lagar gäller. Bevisa att ingen av dessa lagar gäller genom att ange exempel på mängder A, B, C som inte uppfyller den första lagen och (kanske andra) mängder A, B, C som inte uppfyller den andra lagen. För att ange en fullständig lösning behöver du också explicit räkna ut vad VL (vänster led) och HL (höger led) är för alla dina exempel och verkligen visa att $VL \neq HL$. (Dumt att kalla dessa för "lagar" då men, ja, det får bli så)

Lösning: Det är lätt att rita Venndiagram för att hitta exempel på mängder som inte uppfyller lagarna. Eftersom Venndiagram inte kan användas i bevisföring måste vi dock räkna ut vänster och höger led i bå lagarna ovan. För att visa att lag 1 inte gäller, ansätt

$$A = \{1, 2, 4\}, \qquad B = \{2, 3, 4\}, \qquad C = \{4\},$$

då gäller

$$A \oplus (B \cup C) = \{1, 2, 4\} \oplus \{2, 3, 4\} = \{1, 3\}$$

$$(A \oplus B) \cup (A \oplus C) = (\{1, 2, 4\} \oplus \{2, 3, 4\}) \cup (\{1, 2, 4\} \oplus \{4\}) = \{1, 3\} \cup (\{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

och dessa mängder är inte lika vilket visar att första lagen inte gäller. Dessa mängder duger för att visa att även andra lagen inte gäller, vi har:

$$A \oplus (B \cap C) = \{1, 2, 4\} \oplus \{4\} = \{1, 2\}$$

$$(A \oplus B) \cap (A \oplus C) = (\{1, 2, 4\} \oplus \{2, 3, 4\}) \cap (\{1, 2, 4\} \oplus \{4\}) = \{1, 3\} \cap (\{1, 2\} = \{1\}$$

och eftersom dessa mängder inte är lika så gäller inte heller andra lagen.

3. Funktioner. Beteckna med $\mathbb{N}$ de naturliga talen, alltså de positiva heltalen $1, 2, 3, \ldots$. Vi inför en annan funktion, $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ genom att säga att $i(x)$ är det största heltalet som är mindre än eller lika med $\sqrt{x}$. (Till exempel har vi $i(1) = 1$, $i(2) = 1$ och $i(4) = 2$. Låt nu vidare funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara given av $f(x) = x^2$. Visa följande tre saker:

1. f är inte bijektiv.
2. i är inte bijektiv.
3. $i \circ f$ är bijektiv.

Lösning: Funktionen f är inte bijektiv eftersom den inte är surjektiv, till exempel har vi inget x som ger $f(x) = 2$, detta x skulle i så fall uppfylla $x^2 = 2$ och det finns inget heltal som uppfyller detta. Funktionen $i(x)$ är inte bijektiv för att den inte är injektiv, vi har ju till exempel att $i(1) = i(2) = 1$, men $1 \neq 2$. Slutligen är $i \circ f$ bijektiv eftersom

$$i \circ f(x) = i(x^2) = x$$

det vill säga $i \circ f = \iota_{\mathbb{N}}$ som förstås är bijektiv.

4. Inledande talteori. Låt a, b, c vara siffror i ett tresiffrigt tal abc. Visa att

$$11|abc \Leftrightarrow 11|a - b + c.$$

(Att a, b, c är siffror betyder att de är heltal $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$ där $a \neq 0$ eftersom vi har ett tresiffrigt tal).

Lösning: Det tresiffriga talet abc kan också skrivas $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$. Nu har vi

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = a \cdot (1 + 9 \cdot 11) + b \cdot 11 - b + c \equiv a \cdot 1 - b + c = a - b + c \pmod{11}$$

vilket visar att $11|abc \Leftrightarrow 11|a - b + c$.

5. Relationer. Vi inför mängden A som består av heltal genom

$$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 11, 13, 17\}$$

och definerar relationen $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3|x + 2y.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på A och ta fram ekvivalensklasserna.

Lösning: Vi ska visa reflexivitet, symmetri och transitivitet:

Reflexivitet: För alla $x \in A$ ska vi ha $x\mathcal{R}x$. Vi sätter upp detta allmänt och har

$$x\mathcal{R}x \Leftrightarrow 3|x + 2x \Leftrightarrow 3|3 \cdot x$$

och eftersom $3 \cdot x$ uppenbarligen är delbart med 3 så måste alltså $x\mathcal{R}x$ vilket visar reflexiviteten eftersom detta fungerar för alla $x \in A$. (Anmärkning: detta gäller för *alla* heltal.)

Symmetri: Vi ska nu visa att

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

så vi låter $x, y \in A$ vara godtyckliga med $x\mathcal{R}y$, det vill säga $3|x + 2y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 2y = 3k_1$. Vi ska nu visa att det även finns ett heltal k_2 med $y + 2x = 3k_2$, så studerar uttrycket $x + 2y$:

$$y + 2x = y + 2 \cdot (3k_1 - 2y) = y + 3k_1 - 4y = 3k_1 - 3y = 3 \cdot (k_1 - y) = 3k_2$$

så om k_2 väljs till $k_1 - y$ har vi alltså $y + 2x = 3k_2$ vilket visar $3|y + 2x$ det vill säga vi har $y\mathcal{R}x$ så $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ vilket visar symmetrin.

Transitivitet: Slutligen ska vi visa för godtyckliga x, y, z att vi alltis har implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

så vi antar alltså att x, y, z är godtyckligt valda i A och att

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z.$$

Detta innebär att det finns k_1, k_2 sådana att

$$x + 2y = 3k_1, \qquad y + 2z = 3k_2$$

och frådetta ska vi nu visa att det finns ett k_3 sådant att $x + 2z = 3k_3$. Så vi sätter återigen upp det uttryck vi är intresserade av:

$$x + 2z = 3k_1 - 2y + 3k_2 - y = 3(k_1 + k_2 - y) = 3k_3$$

så om vi sätter $k_3 = k_1 + k_2 - y$ så har vi $x + 2z = 3k_3$ vilket visar $x\mathcal{R}z$ som visar transitiviteten.

Sammantaget eftersom $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den en ekvivalensrelation. Vi ska nu ta fram de olika ekvivalensklasserna i A och eftersom A bara har ett ändligt antal element så kan vi helt enkelt bara välja element ur A och se vilka som är relaterade till varandra. Vi sätter bara upp $1 + 2 \cdot y$ för alla $y \in A$ förutom $y = 1$:

$$1+2\cdot 2 = 5, \quad 1+2\cdot 4 = 9, \quad 1+2\cdot 5 = 11, \quad 1+2\cdot 8 = 17, \quad 1+2\cdot 11 = 23, \quad 1+2\cdot 13 = 27, \quad 1+2\cdot 17 = 35.$$

Överallt där vi har multiplar av 3 har vi alltså $1\mathcal{R}y$, det gäller för två y, nämligen $y = 4$ och $y = 13$. Det betyder att en ekvivalensklass utgörs av

$$\{1, 4, 13\}.$$

Vi kan nu välja ett annat tal utanför denna klass och återigen studera samma typ av uträkning. Vi studerar uttrycken $2 + 2 \cdot y$ där $y \neq 2$. Observera att vi inte behöver välja y ur den ekvivalensklass vi redan funnit. Alltså beräknar vi

$$2 + 2 \cdot 5 = 12, \quad 2 + 2 \cdot 8 = 18, \quad 2 + 2 \cdot 11 = 24, \quad 2 + 2 \cdot 17 = 36$$

och eftersom *alla* dessa uträkningar ger multiplar av 3 måste alla dessa ingå i samma ekvivalensklass som 2, det vill säga den andra ekvivalensklassen är:

$$\{2, 5, 8, 11, 17\}.$$

Om vi betraktar de ekvivalensklasser vi funnit och konstaterar att unionen av dessa är hela A så kan det inte finnas någon annan ekvivalensklass. Vi har alltså funnit alla ekvivalensklasser.

Anmärkning: Vi kan lättare skriva om

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3|x + 2y \Leftrightarrow x + 2y \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow x - y \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$$

det vill säga relationen är precis kongruensrelationen modulo 3, och det är välkänt att det är en ekvivalensrelation, så första delen följer direkt av detta resonemang. Andra delen, alltså ekvivalensklasserna, kan observeras genom att konstatera att $\{1, 4, 13\}$ är mängden av tal som är kongruenta med 1 modulo 3 i A och således utgör en ekvivalensklass och på samma sätt är $\{2, 5, 8, 11, 17\}$ den andra ekvivalensklassen eftersom den mängden består av tal som är kongruenta med 2 modulo 3.

6. Fördjupad talteori. För alla heltal $n \geq 2$ visa, med matematisk induktion, att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow VL_n < HL_n$ där $VL_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ och $HL_n = 2 - \frac{1}{n}$. Vi ska nu visa $\forall n \geq 2 : A(n)$. Vi tar nu de tre stegen som krävs i ett induktionsbevis:

Steg 1. Kontrollera att $A(2)$ gäller, det vill säga att $VL_2 < HL_2$. Vi beräknar $VL_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = 1/1^2 + 1/2^2 = 1 + 1/4 = 5/4$ respektive $HL_2 = 2 - 1/2 = 3/2$. Eftersom $VL_2 = 5/4 = 1.25 < 1.5 = 3/2 = HL_2$ så gäller $A(2)$ vilket fullbordar steg 1.

Steg 2. – Induktionssteget. Vi ska i detta steg visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p + 1)$ gäller för alla $p \geq 2$. Vi antar därför att $A(p)$, dvs $VL_p < HL_p$, för ett visst $p \geq 2$ och vi ska med stöd av detta visa att $A(p + 1)$ dvs $VL_{p+1} < HL_{p+1}$ gäller. Vi har alltså $VL_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p} = HL_p$ och vi vill att $VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{(p+1)} = HL_{p+1}$ ska gälla. Vi undersöker VL_{p+1}:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(p+1)^2} = VL_p + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Här kan vi använda induktionsantagandet $VL_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{p} = HL_p$ för att skatta uppåt genom

$$VL_{p+1} = VL_p + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Vi har klarat av uppgiften att visa att $VL_{p+1} < HL_{p+1}$ om vi kan visa att det sista uttrycket i sin tur är strängt mindre än $VL_{p+1} = 2 - \frac{1}{p+1}$, vi vill alltså fastställa att

$$2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p+1}.$$

Vi kan studera vad denna utsaga är ekvivalent med och förhoppningsvis komma fram till att den är ekvivalent med en sann utsaga. Vi har då

$$2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} < \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} \Leftrightarrow$$

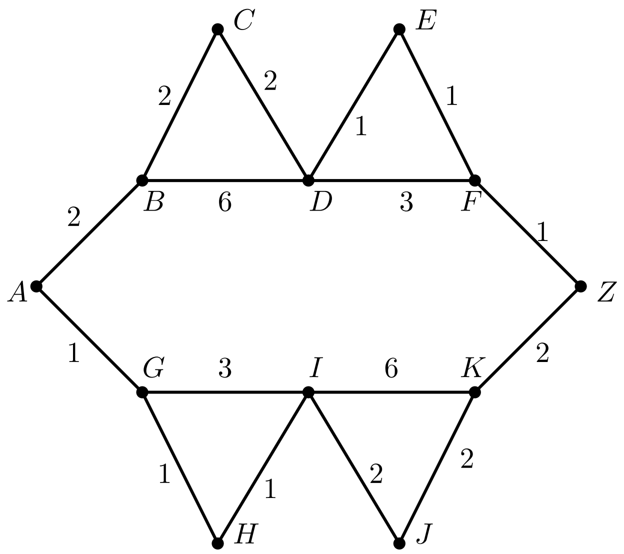
$$\frac{p}{p+1} < 1 - \frac{p}{(p+1)^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{p+1} < 1 - \frac{p}{(p+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p}{(p+1)^2} < \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow \frac{p}{(p+1)} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(p+1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(p+1)} > 0$$

och denna sista utsaga är sann eftersom $p+1$ är ett positivt tal. Detta visar att $VL_{p+1} < HL_{p+1}$. Sammantaget kan vi dra slutsatsen $VL_p < HL_p \Rightarrow VL_{p+1} < HL_{p+1}$, det vill säga $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ vilket fullbordar steg 2.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 samt induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. *(a)* Använd Dijkstras algoritm för att i nedanstående graf hitta kortaste vägen mellan hörn A och hörn Z. Redovisa samtliga steg med samtliga kandidatetiketter. *(b)* Finns det mer än ett alternativ till kortaste väg? Ange i så fall ett sådant alternativ.



Lösning: (a): Vi utför Dijkstras algoritm. Kandidatetiketter anges *kursivt* och valda etiketter anges i **fet** stil:

Steg 1. *B(A,2)*, **G(A,1)**
Steg 2. **B(A,2)**, **H(G,2)**, *I(G,4)*
Steg 3. **I(H,3)**, *C(B,4)*, *D(B,8)*
Steg 4. **C(B,4)**, *D(B,8)*, *J(I,5)*, *K(I,9)*
Steg 5. *D(C,6)*, **J(I,5)**, *K(I,9)*
Steg 6. *K(J,7)*, **D(C,6)**
Steg 7. **K(J,7)**, **E(D,7)**, *F(D,9)*
Steg 8. **F(E,8)**, *Z(K,9)*
Steg 9. **Z(K,9)**, *Z(E,9)*

Så en kortaste väg från A till Z är

$$A \to G \to H \to I \to J \to K \to Z$$

som har kostnad 9.

(b): Ett alternativ till kortaste väg hade uppstått om vi i sista steget valt etiketten $Z(E,9)$, detta hade resulterat i denna kortaste väg:

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to Z$$

som förstås också har kostnaden 9.

8. Kombinatorik. Låt p vara ett primtal > 2. För vilka värden på det positiva heltalet a saknar binomialutvecklingen av $(x^a + \frac{1}{x^a})^p$ konstantterm?

Lösning: Om p är ett primtal > 2 måste p vara ett udda tal. Binomialsatsen ger oss

$$\left(x^a + \frac{1}{x^a}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (x^a)^{p-k} \cdot (x^{-a})^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{ap-ak-ak} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{a(p-2k)}.$$

Vi är intresserade av när denna utveckling innehåller en konstantterm och det sker precis då exponenten $a(p-2k)$ är noll. Talet a var positivt så vi får

$$a(p-2k)=0 \Leftrightarrow p-2k=0 \Leftrightarrow p=2k$$

men detta kan aldrig inträffa eftersom p var udda. Det betyder att för varje val på a saknar utvecklingen konstantterm.

9. Sannolikhetslära. Låt A, B, C vara tre händelser med $P(A \cap B \cap C) = 0$. Visa att

$$P(A \cup B \cup C) = P(A - C) + P(B - A) + P(C - B).$$

Lösning: För vilka händelser E, F som helst har vi sambandet

$$P(E - F) = P(E) - P(E \cap F).$$

Vi ska använda det tillsammans med principen om inklusion och exklusion för händelser som lyder

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Vi kan omordna detta uttryck och ta bort termen $P(A \cap B \cap C)$ (eftersom den är noll), då får vi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(B \cap C)$$

och nu använder vi sambandet ovan och skriver till exempel $P(A) - P(A \cap C) = P(A - C)$ och vi får då

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) - P(A \cap C) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(B \cap C) = P(A - C) + P(B - A) + P(C - B)$$

vilket fullbordar beviset.