Tentamen i CM1000 – Diskret Matematik, april 2022

Delar

Tentamen har tre delar. Den första delen – Del I – består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens tidigare skrivningar behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade. Den andra delen – Del II – består av ett problem som ni kan lösa för betyg C, för att få betyg C måste dock kraven för betyg E vara uppfyllda. Den sista delen – Del III – består av ett problem som ni kan lösa för att få betyg A. Om ni uppfyller kraven för betyg C och klarar det problemet från del III uppfyller ni kraven för betyg A. Betyg B respektive D reserveras för situationer där studenter försökt på högre betyg men inte riktigt nått fram. Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar.

Tillgodoräknande

Om en uppgift som tillhör ett högre betyg löses korrekt och den uppgiften kan sägas *täcka* ett av de grundläggande nio delområdena, så kan lösningen av den uppgiften tillgodoräknas för det grundläggande delområde som täcks av högrebetygsuppgiften – det delområdet anses då avklarat. Det betyder att om ni misslyckas med en lösning av ett problem i Del I så kan ni ändå få det området avklarat om ni klarar av att lösa en motsvarande högrebetygsuppgift. I alla uppgifter för högre betyg anges vilken uppgift i Del I som de kan täcka. Om ni känner er osäkra på er lösning av någon uppgift i Del I kan ni också ge en lösning för en högrebetygsuppgift som täcker den uppgift ni är osäkra på.

Del I

1. Logik. Låt p, q, r beteckna godtyckliga utsagor. Ge utredningar om följande två logiska ekvivalenser gäller eller inte. Det vill säga, för varje ekvivalens, om den gäller ge ett bevis, om den inte gäller ange en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som illustrerar att den inte gäller:

$$(p \vee q) \to (r \vee q) \Leftrightarrow (p \to r) \vee q \qquad (p \wedge q) \to (r \wedge q) \Leftrightarrow (p \to r) \wedge q.$$

(Sanningstabeller är tillåtna.)

Svar: Sanningstabeller ger lätt att det är $(p \vee q) \to (r \vee q) \Leftrightarrow (p \to r) \vee q$ som stämmer och att sanningstilldelningen $q = falsk$ direkt ger $(p \wedge q) \to (r \wedge q) = sann$ respektive $(p \to r) \wedge q = falsk$. (Fullständiga lösningen ges inte här.)

2. Mängdlära. Vi kan bilda oändliga unioner och snitt lika lätt som ändliga unioner och snitt. Om $A_1, A_2, A_3, \ldots$ är en oändlig följd av mängder kan vi göra dessa definitioner:

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : (\exists n : x \in A_n)\} \qquad \text{respektive} \qquad \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : (\forall n : x \in A_n)\}.$$

Låt nu $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -1/n < x < 1/n\}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Vad är $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ respektive $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$? Fullständig motivering krävs.

Lösning: Mängderna A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ är en följd av kapslade intervall, vi har $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$. Det betyder att mängderna $A_2, A_3, \ldots$ inte tillför något till $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ som inte redan ligger i A_1, vi har därför

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = (-1, 1).$$

Samma egenskap hos mängderna blir intressant när vi studerar $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$, att mängderna är kapslade intervall betyder att varje snitt av typen

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$$

blir mindre och mindre ju större k vi har. Vi kan misstänka att $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ därför är en mycket liten mängd. Och om vi har ett tal $d > 0$ så gäller $d \notin A_n$ för $n > 1/d$, om vi har ett tal $d < 0$ så har vi på samma sätt $d \notin A_n$ för

$n > 1/|d| = -1/d$. Det betyder att inga tal $\neq 0$ ligger i alla A_n. För alla tal $x \neq 0$ gäller alltså $x \notin \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Dock gäller $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ eftersom talet 0 alltid uppfyller $-1/n < 0 < 1/n$ för alla n. Sammantaget har vi alltså

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = \{0\}.$$

3. Funktioner. Betrakta nedanstående två mängder. Den ena av dem är en funktion och den andra är inte en funktion. Avgör och motivera fullständigt vilken som är vilken.

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge y + 1 > x\}$$

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (y-1)^2 \wedge x + 2y \geq 2 \wedge x \leq 1\}$$

Lösning: Den första mängden ger inte en funktion. Vi kan se det genom att välja $x = 1/10$. Studera, för $x = 1/10$ kravet på att $(x,y) \in E$:

$$(1/10 - 1)^2 + y^2 = 1 \wedge 1 + y > 1/10 \Leftrightarrow$$

$$0.81 + y^2 = 1 \wedge y > -0.9 \Leftrightarrow$$

$$(y = \sqrt{0.19} \vee y = -\sqrt{0.19}) \wedge y > -0.9 \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{0.19} \vee y = -\sqrt{0.19} > -0.9$$

Så $y_1 = \sqrt{0.19}$ respektive $y_2 = -\sqrt{0.19}$ har $(1/10, y_1), (1/10, y_2) \in E$ vilket visar att E inte ger en funktion.

Det betyder att vi ska visa att F definierar en funktion. Vi har

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow x = (y-1)^2 \wedge x + 2y \geq 2 \wedge x \leq 1 \Leftrightarrow$$

och vi ska visa att av detta definieras y som funktion av x. Det är frestande att skriva att $\sqrt{x} = y - 1$ och att alltså konstatera att $y = 1 + \sqrt{x}$ och det kommer att vara rätt svar. Men för att kunna göra detta måste vi säkerställa att $y - 1 \geq 0$. Vi ställer oss alltså frågan om $x + 2y \geq 2 \wedge x \leq 1$ ger oss $y - 1 \geq 0$. Vi konstaterar att eftersom $(y-1)^2 \geq 0$ så gäller alltid $x \geq 0$ så vi kan sammanfatta informationen om gränserna för x och y i olikheterna

$$0 \leq x \leq 1 \qquad x + 2y \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2 - 2y.$$

Nu har vi $x = (y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = x \geq 2 - 2y$ som ger

$$y^2 - 2y + 1 \geq 2 - 2y \Rightarrow y^2 \geq 1 \Rightarrow y \leq -1 \vee y \geq 1$$

vi har alltså två fall: $y \leq -1$ och $y \geq 1$. Det första fallet går inte eftersom vi också ska ha $x + 2y \geq 2$, vi får nämligen då $-y \geq 1$ som ger

$$x \geq 2 - 2y = 2 + 2 \cdot -y \geq 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

vilket strider mot $x \leq 1$. Alltså kan bara fallet $y \geq 1$ gälla vilket ger precis $y - 1 \geq 0$ så att $\sqrt{x} = y - 1 \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x}$ stämmer, det vill säga mängden F definierar en funktion.

4. Inledande talteori. Låt n vara ett positivt heltal och låt p vara ett primtal med $p|(n+1)! + 1$. Visa att $p > n$.

Lösning: Vi antar motsatsen, det vill säga att $p \leq n$. Att $p|(n+1)! + 1$ innebär att $(n+1)!$ ger resten $p - 1$ vid division med p, talet $(n+1)!$ är alltså inte delbart med p. Vi drar alltså slutsatsen

$$p \not| (n+1)!.$$

Men talet $(n+1)!$ är en produkt av talen $1, 2, 3 \ldots, n, n+1$ och eftersom vi har $p \leq n$ måste p vara ett av talen $1, 2, 3 \ldots, n, n+1$, det betyder i sin tur att

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p \cdot \ldots (n+1)$$

så p ingår som faktor i $(n+1)!$ det vill säga vi har $p|(n+1)!$ vilket motsäger vår tidigare slutsats. Antagandet om att primtalet p har $p \leq n$ måste alltså vara falskt, och vi har därför visat $p > n$ vilket skulle bevisas.

5. Relationer. Låt mängden $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ vara given. Definera $\mathcal{R}$ på A genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| > n.$$

Här är $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Undersök vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet som denna relation har. Motivera dina slutsatser fullständigt.

Lösning: Relationen är inte reflexiv och inte transitiv, men den är symmetrisk. Detta ser vi genom att observera att

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}| = 0 \not> n, \text{ för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Detta visar att relationen inte är reflexiv. Vi ser att relationen är symmetrisk genom att observera att

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}|$$

vilket ger

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n : |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| > n \Leftrightarrow \exists n : |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| > n \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Detta visar symmetrin. Vi ser till slut att relationen inte är transitiv om vi sätter

$$x = 0.1, \qquad y = 0.2, \qquad z = 0.1.$$

Då har vi som vi tidigare observerat att vi inte har $x\mathcal{R}z$ (eftersom $x = z$), men vi har också

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2}| = |10 - 5| = 5 > n$$

som stämmer för till exempel $n = 1$. Det betyder att $x\mathcal{R}y$ och genom symmetrin $y\mathcal{R}x$, vilket ger $y\mathcal{R}z$ (eftersom $x = z$) så att vi har

$$x\mathcal{R}y \qquad \text{och} \qquad y\mathcal{R}z.$$

Eftersom vi tidigare konstaterade att vi dock inte hade $x\mathcal{R}z$ så kan inte relationen vara transitiv.

6. Fördjupad talteori. För alla heltal $n \geq 2$ visa, med matematisk induktion, att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 < n^3$.

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow VL_n < HL_n$ där $VL_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ och $HL_n = n^3$. Vi ska nu visa $\forall n \geq 2 : A(n)$. Vi tar nu de tre stegen som krävs i ett induktionsbevis:

Steg 1. Kontrollera att $A(2)$ gäller, det vill säga att $VL_2 < HL_2$. Vi beräknar $VL_2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ respektive $HL_2 = 2^3 = 8$. Eftersom $VL_2 = 5 < 8 = HL_2$ så gäller $A(2)$ vilket fullbordar steg 1.

Steg 2. Induktionssteget. Vi ska i detta steg visa att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ gäller för alla $p \geq 2$. Vi antar därför att $A(p)$, dvs $VL_p < HL_p$ gäller för ett visst $p \geq 2$ och vi ska med stöd av detta visa att $A(p+1)$ dvs $VL_{p+1} < HL_{p+1}$ gäller. Vi har alltså $VL_p = \sum_{k=1}^{p} k^2 < p^3 = HL_p$ och vi vill att $VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 < (p+1)^3 = HL_{p+1}$ ska gälla. Vi undersöker VL_{p+1}:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 = VL_p + (p+1)^2.$$

Här kan vi använda induktionsantagandet $VL_p = \sum_{k=1}^{p} k^2 < p^3 = HL_p$ för att skatta uppåt genom

$$VL_{p+1} = VL_p + (p+1)^2 < p^3 + (p+1)^2 = p^3 + p^2 + 2p + 1.$$

Och vi ser att detta är strängt mindre än HL_{p+1} eftersom

$$HL_{p+1} = (p+1)^3 = p^3 + 3p^2 + 3p + 1$$

vilket visar $VL_{p+1} < HL_{p+1}$. Sammantaget kan vi dra slutsatsen $VL_p < HL_p \Rightarrow VL_{p+1} < HL_{p+1}$, det vill säga $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ vilket fullbordar steg 2.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 samt induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. Grafteori. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. V är alltså mängden av hörn och E är alltså mängden av kanter. Visa att följande relation alltid gäller

$$2|E| \leq |V|^2 - |V|.$$

Ledning: Kom ihåg att en graf (till skillnad fraån en pseudograf) inte kan innehålla kanter med samma hörn som ändpunkter och två hörn kan max ha en kant mellan sig.

Lösning: Antag att antalet hörn i den graf vi studerar är n, vi har alltså $|V| = n$. Begränsningarna på en graf innebär att vi inte kan har fler kanter än den fullständiga grafen. Den fullständiga grafen K_n har då precis en kant mellan varje par av hörn. Antal kanter i den fullständiga grafen är $n \cdot (n-1)/2$ som kan ses som $\binom{n}{2}$ som är antalet sätt att välja ut två hörn från n möjliga. Detta tal, $n \cdot (n-1)/2$ är alltså en övre gräns för antalet kanter. Vi har därför

$$|E| \leq n \cdot (n-1)/2 \Leftrightarrow |E| \leq |V| \cdot (|V|-1)/2 \Leftrightarrow 2|E| \leq |V| \cdot (|V|-1)$$

vilket är ekvivalent med det som skulle bevisas.

8. Kombinatorik. Låt $n > 0$ vara ett godtyckligt heltal. Visa att

$$\sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ udda}} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leq k \leq n,\ k \text{ jämnt}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Till exempel har vi för $n = 4$:

$$\sum_{0 \leq k \leq 4,\ k \text{ jämnt}} \binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

och

$$\sum_{0 \leq k \leq 4,\ k \text{ udda}} \binom{4}{k} = \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8 = 2^3 = 2^{4-1}$$

Ledning: Studera binomialutvecklingen av $(a+b)^n$ där a, b väljs på ett lämpligt sätt.

Lösning: Vi har som en given sats att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Vi kommer att använda det. Om vi väljer $a = 1$ respektive $b = -1$ så har vi

$$0 = (a+b)^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k.$$

Denna summa kan delas upp i termer som är negativa som uppkommer av udda k och termer som är positiva som uppkommer av jämna k. Vi har då alltså

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0,\ k \text{ jämnt}}^{n} \binom{n}{k} - \left(\sum_{k=0,\ k \text{ udda}}^{n} \binom{n}{k} \right)$$

vilket ger

$$\sum_{k=0,\ k \text{ jämnt}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0,\ k \text{ udda}}^{n} \binom{n}{k}$$

vilket är första halvan av det som skulle visas. Eftersom dessa två summor är lika och tillsammans är 2^n följer även

$$\sum_{k=0,\ k \text{ jämnt}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0,\ k \text{ udda}}^{n} \binom{n}{k} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

vilket fullbordar beviset.

9. Sannolikhetslära. Två tärningar kastas. Vi inför tre händelser:

$A =$ Tärningssumman är 3.
$B =$ Tärningssumman är 7.
$C =$ Minst en av tärningarna visar en etta.

(a) Beräkna $P(A|C)$
(b) Beräkna $P(B|C)$
(c) Är händelserna A och C oberoende? Hur är det med B och C? Är de oberoende?

Lösning: Vi kan rita ett rutnät med 6x6 rutor där varje ruta representerar ett utfall i utfallsrummet som bildas då två tärningar kastas. Vi får då följande figur:

BC					
C	B				
C		B			
C			B		
AC				B	
C	AC	C	C	C	BC

Vi har i varje utfall/ruta markerat de olika händelser som det utfallet ingår i och från denna figur kan vi utläsa

$$P(A) = 2/36 = 1/18, \qquad P(B) = 6/36 = 1/6, \qquad P(C) = 11/36.$$

Vi har nu *(a)* $P(A \cap C) = 2/36$ vilket ger

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

Vidare följer *(b)* att $P(B \cap C) = 2/36$ som ger också ger $P(B|C) = 2/11$.

Definitionen av att två händelser E, F är oberoende är att $P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$, vi kontrollerar om det stämmer för A och C:

$$P(A \cap C) = 2/36 \qquad P(A) = 2/36, P(C) = 11/36,$$

helt klart gäller inte $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ eftersom $P(A \cap C) = P(A)$ men $P(C) \neq 1$.

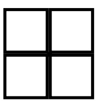
För att se om B och C är oberoende studerar vi

$$P(B) = 1/6, \qquad P(C) = 11/36, \qquad P(B \cap C) = 2/36$$

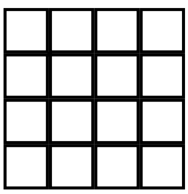
eftersom vi inte har $1/6 \cdot 11/36 = 2/36$ (ty $11/6 \neq 2$) gäller inte heller oberoende för B och C.

Del II

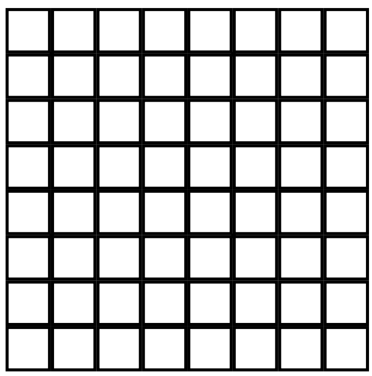
10. För C. *(Kan även täcka område 6 – fördjupad talteori.)* Betrakta, för $n \geq 1$ ett kvadratiskt rutnät med sidlängden 2^n rutor:



$n = 1, 2^n = 2$

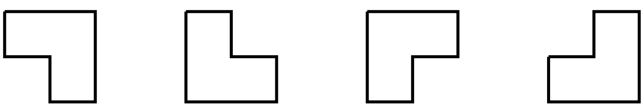


$n = 2, 2^n = 4$

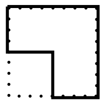


$n = 3, 2^n = 8$

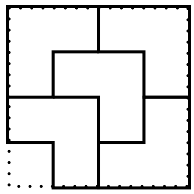
Vi studerar hur en kvadrat med sidan 2^n kan täckas av så kallade gnomoner. En gnomon består av tre intilliggande kvadrater som tillsammans täcker alla utom en av kvadraterna i en kvadrat med sidan två rutor, det finns fyra varianter av en gnomon beroende på hur vi orienterar den:



Bevisa, med matematisk induktion, att varje kvadrat med sidlängden 2^n rutor, där n är ett positivt heltal (≥ 1) kan täckas av $(2^{2n}-1)/3$ så kallade ”gnomoner” på ett sådant sätt att endast en ruta i ett av hörnen inte blir övertäckt. För att förtydliga vad som menas ger vi här övertäckningarna för $n=1$ respektive $n=2$:



$n = 1, 2^n = 2$



$n = 2, 2^n = 4$

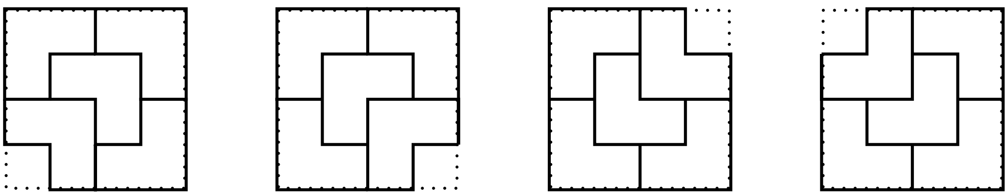
Observera: Du behöver dels visa formeln, att antalet gnomoner blir $(2^{2n}-1)/3$ och dels visa att alla dessa gnomoner *verkligen* täcker över kvadraten med sidan 2^n på det angivna sättet.

Ledning: Att övertäckningen existerar behöver visas med en geometrisk skiss i den matematisk induktionen. Eftersom de första två övertäckningarna redan är givna behöver du inte ta första steget i induktionsbeviset, bara hänvisa till skissen ovan för $n=1$, för att ta induktionssteget från $n=p$ till $n=p+1$ kan det vara bra att veta att om en mängd gnomoner täcker över en kvadrat på det angivna viset så kan vi rotera övertäckningen och få en ny liknande övertäckning som täcker kvadraten men där en ruta i ett annat hörn inte är övertäckt. (Vi räknar inte antalet övertäckningar, vi ska bara visa att det finns övertäckningar av det angivna slaget.)

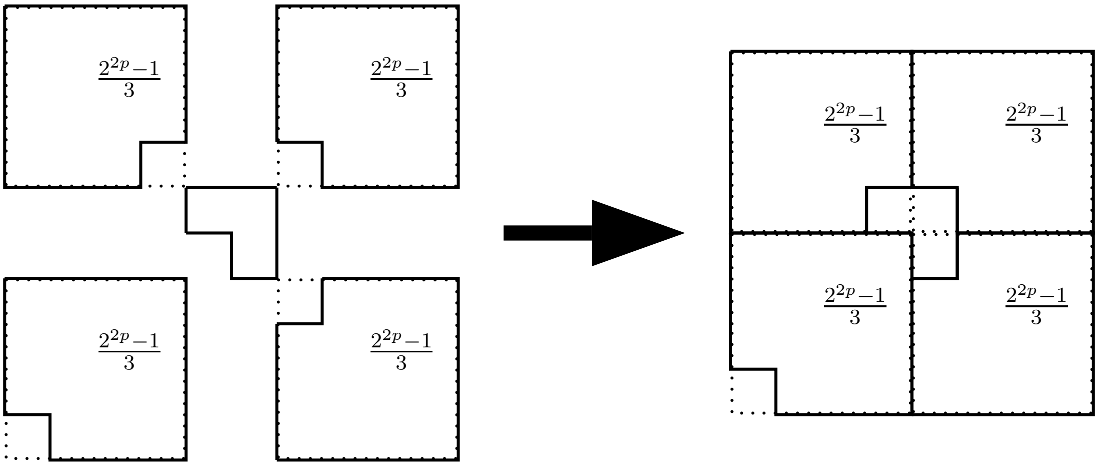
Lösning: Induktion över n: vi inför predikatet

$$A(n) \Leftrightarrow \textit{det existerar en övertäckning av kvadraten med sidan } 2^n \textit{ rutor}$$

där *övertäckning* betyder $(2^{2n}-1)/3$ gnomoner som täcker hela kvadraten utom en ruta i ett hörn. Vi konstaterar att om $(2^{2n}-1)/3$ gnomoner täcker en kvadrat med sidan 2^n rutor så kan hela uppsättningen gnomoner roteras så att vi kan välja vilken av de fyra hörnrutorna som inte ska vara övertäckt. Vi illustrerar detta för $n=2$:



Vi tar nu induktionssteget från $n=p$ till $n=p+1$ och vi antar därför att det finns en övertäckning av en kvadrat med 2^p rutor med gnomoner. Tag nu fyra såda övertäckningar och placera dem intill varandra så att de kan täcka över en kvadrat med sidan $2 \cdot 2^p = 2^{p+1}$ och orientera dessa övertäckningar så att de rutor som inte täcks över av de övre övertäckningarna och den nedre till höger tillsammans utgör en gnomon. Lägg till en extra gnomon där. Orientera också den nedre vänstra övertäckningen så att den ruta som inte täcks är längst ner till vänster. Då utgör alla gnomoner i alla övertäckningarna tillsammans en övertäckning av kvadraten med sidan 2^{p+1}. Det ser ut så här:



där den stora pilen anger att vi så att säga slår samman de fyra mindre övertäckningarna och lägger till den extra gnomonen i mitten. En ny övertäckning nås som täcker över rutnätet med sidan 2^{p+1} och antal gnomoner som används är

$$\frac{2^{2p}-1}{3}+\frac{2^{2p}-1}{3}+\frac{2^{2p}-1}{3}+\frac{2^{2p}-1}{3}+1=4\cdot\frac{2^{2p}-1}{3}+1=\frac{4\cdot 2^{2p}-4+3}{3}=\frac{2^{2(p+1)}-1}{3}$$

vilket fullbordar induktionssteget. Induktionsaxiomet och steg 1 samt induktionsteget fullbordar beviset.

Del III

11. För A. *(Kan också täcka område 4, Inledande Talteori.)* Vi låter a, b, c beteckna godtyckliga heltal. Om vi har

$$a|b+c, \qquad b|a+c, \qquad c|a+b$$

så kan vi skriva det som att det finns $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$b+c=ak_1, \qquad a+c=bk_2, \qquad a+b=ck_3.$$

Vi inskränker oss nu till specialfallet då $k_1 = k_2 = k_3$ och vi betecknar det gemensamma värdet med k. Undersök för vilka a, b, c, k detta är möjligt då minst en av a, b, c är skild från noll.

Lösning: Vi söker alltså a, b, c, k som uppfyller

$$\begin{cases} b+c=ak \\ a+c=bk \\ a+b=ck \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ka+b+c=0 \\ a-kb+c=0 \\ a+b-kc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där minst en av a, b, c inte är noll. Det betyder att determinanten av matrisen måste vara noll, annars finns inga lösningar där någon av a, b, c inte är noll. Vi har alltså

$$det\begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 2-k & 2-k & 2-k \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-k)det\begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$(2-k)det\begin{pmatrix} -1-k & 0 & 0 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-k)(-1-k)^2 det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (2-k)(-1-k)^2\cdot 1=0$$

Och denna sista ekvation kan skrivas

$$(k-2)(k+1)^2=0$$

som har lösningarna -1 respektive 2. För dessa två värden på k kan vi alltså möjligtvis hitta värden på a, b, c som uppfyller de ursprungliga delbarhetskraven (med det gemensamma k:et).

Om vi sätter $k=-1$ så får vi

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b+c=0$$

det vill säga alla tal som uppfyller $a+b+c=0$ (dock inte $a=b=c=0$) uppfyller

$$b+c=a\cdot -1, \qquad a+c=b\cdot -1, \qquad a+b=c\cdot -1$$

som också kan uttryckas som de ursprungliga delbarhetsrelationerna. En lösning är till exempel

$$a=1, b=2, c=-3.$$

För $k=2$ har vi

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+b+c=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases}.$$

Om de övre två ekvationerna adderas till den undre ger detta $0=0$, det vill säga vi kan stryka den tredje ekvationen och välja till exempel c godtyckligt. Lösningarna får då formen

$$\begin{cases} -2a+b=-c \\ a-2b=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b=-3c \\ a-2b=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a-2c=-c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Så för $k=2$ uppfyller alla tal a, b, c delbarhetsförhållandena om $a=b=c$, här undantar vi åter igen $a=b=c=0$ eftersom frågeställningen formulerades så. Exempel på en lösningar här är $a=b=c=2$.