Kontrollskrivning 4 – CM1000, Diskret Matematik, HT2021

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen, ingen miniräknare. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Inlämning sker i form av fotograferade handskrivna lösningar i aktuell Quiz på kurswebben. Om ni av någon anledning inte kan scanna in en fil och måste mejla den till mig, ladda istället upp en platsmarkörsfil och mejla er lösning till mig. Jag kan inte rätta uppgifter som inte har uppladdade bildfiler och observera att om ni trycker på ”skicka in”/”submit” så kan inte inte längre lämna in några lösningar. Om ni mejlar en lösning till mig måste också detta föregås av en diskussion med mig (ansvarig lärare) på skrivningens zoommöte under skrivtiden.

Skrivtiden är de normala 1 timme och 45 minuter + 25-30 minuter extra tid för bildhantering & uppladdning, därför tillgängliggörs skrivningen 10-15 minuter innan 14.00 och sista (ordinarie) inlämningstid är 16.00. Observera att all behandling av alla uppgifter och all hantering med inlämning ska ske under denna tid. Annars rättas inte lösningarna. Det är Canvas tidsstämplar som gäller. (Några har förlängd skrivtid och motsvarande klockslag för dem är 17.00.) Fullständiga lösningar krävs normalt till alla uppgifter. Till denna kontrollskrivning hör Muntlig Tentamen 2 och de uppgifter som kan användas för Muntlig Tentamen 2 är **2a**, **2b**, **3a**, **3b**, **5a**, **5b** och **6**. OBS: För uppgifterna 2, 3, 5 som har en a- och en b-variant så får endast en lösning till *en* av dessa lämnas in per uppgift. Lämnar ni in både a-varianten och b-varianten till en uppgift med två alternativ rättas ingen. Ni får förstås lösa flera av 2:an, 3:an och 5:an, men för varje uppgift endast lämna in lösningar på a- eller b-varianten, inte båda.

1. Logik. I den här uppgiften låter vi p, q, r beteckna godtyckliga utsagor. Betrakta nedanstående två påståenden:

$$r \to (q \to \neg p) \Leftrightarrow p \to (q \to \neg r) \qquad p \to (q \to r) \Leftrightarrow q \to (r \to p)$$

Ett av påståendena är sant för alla utsagor p, q, r och ett av dem är inte sant för alla utsagor p, q, r. Bevisa det påstående som är sant och ge exempel på en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som visar att det påstående som inte gäller för alla p, q, r verkligen inte gäller för alla p, q, r. Alla metoder är tillåtna.

2a. Mängdlära. ***OBS! – Lös högst en av 2a och 2b. Löser ni båda rättas ingen!*** Låt $A \subset E$, $|A| < |E|$ respektive $B \subset F$, $|B| < |F|$. Vi uppfattar då $A \times B$ som en delmängd av ett universum $U = E \times F$ som vi också antar innehåller ett ändligt antal element. Nedan finns två påståenden. Det ena är sant för alla val av A, B, E, F som beskrivits ovan, det andra är *inte* sant för alla val av A, B, E, F som beskrivits ovan. Bevisa det sanna påståendet och för det falska påståendet, ange ett exempel på ett val av mängder A, B, E, F där påståendet inte är sant.

$$\text{Påstående 1: } (A^c \times B^c)^c = (A \times B) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$

$$\text{Påstående 2: } |(A^c \times B^c)^c| = |A \times B|.$$

Venndiagram är som vanligt inte tillåtna som en del av en lösning, men det är klart att du kan rita diagram och ha i dina anteckningar som du inte lämnar in.

2b. Mängdlära. ***OBS! – Lös högst en av 2a och 2b. Löser ni båda rättas ingen!*** Låt A, B, C beteckna godtyckliga mängder. Visa att vi alltid har

$$((A \cup B \cup C) - (A \oplus B \oplus C)) \cup (A \cap B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C).$$

Ledning: $E \oplus F$ betyder $(E - F) \cup (F - E)$. Det kan vara arbetsamt att försöka visa denna identitet bara med hjälp av mängdregler. Det är bättre att sätta upp ett så kallat *elementargument* och studera utsagorna $p \Leftrightarrow x \in A$, $q \Leftrightarrow x \in B$, $r \Leftrightarrow x \in C$, och om VL och HL betecknar vänster respektive höger led i identiteten som ska visas, visa att

$$x \in VL \Leftrightarrow x \in HL$$

med hjälp av en sanningstabell. Då får ni också utan motivering använda att $A \oplus B \oplus C$ består av de element som ligger i ett udda antal av mängderna A, B, C.

3a. Funktioner. ***OBS! – Lös högst en av 3a och 3b. Löser ni båda rättas ingen!*** För funktioner $f : A \to B$ infördes i kursen för alla mängder $E \subset A$ mängden $f(E)$ genom $f(E) = \{y \in B : x = f(x)\}$. Vi kallade $f(E)$ för *bilden av E genom f*. I den här uppgiften vänder vi på riktningen och för alla mängder $F \subset B$ inför vi *den inversa bilden av F genom f* som mängden

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}.$$

Observera att den här mängden är definierad även om funktionen själv inte är inverterbar. Till exempel, för funktionen $y = f(x) = x^2$ där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har vi $f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$. (Rita gärna en figur för din egen skull för att bättre förstå vad det handlar om.)

Vi låter nu $f : A \to B$ vara en funktion vilken som helst. Visa följande påstående:

$$f \text{ är injektiv om och endast om för alla mängder } F \subset B \text{ vi har } |F| = 1 \Rightarrow |f^{-1}(F)| \leq 1.$$

3b. Funktioner. ***OBS! – Lös högst en av 3a och 3b. Löser ni båda rättas ingen!*** Vi betraktar $\mathbb{R}^3$ som rummet av vektorer med tre komponenter, (x, y, z) och studerar funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$f(1,0,0) = (0,1,0), \quad f(0,1,0) = (0,0,1), \quad f(0,0,1) = (1,0,0)$$

och även $f(u+v) = f(u) + f(v)$, samt $f(au) = af(u)$, för alla vektorer $u, v \in \mathbb{R}^3$ och reella tal $a \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen f är bijektiv.

4. Inledande talteori. Nedan finns två påståenden, det ena är sant och det andra är falskt. Bevisa det som är sant och visa varför det som är falskt är falskt genom att till exempel ge ett motexempel.

$$\text{Om } (a+b)^2 \text{ är udda så är både } a^2 \text{ och } b^2 \text{ udda.}$$

$$\text{Om } a \not\equiv 0 \pmod 2 \text{ och } a \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ så gäller } a \not\equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow a \equiv 5 \pmod 6.$$

5a. Relationer. ***OBS! – Lös högst en av 5a och 5b. Löser ni båda rättas ingen!*** Vi har $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_3$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y = y^2 - x.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och ta fram ekvivalensklasserna.

Ledning: Eftersom $\mathbb{Z}_3$ bara har tre element så blir det *mycket* lätt att ta fram ekvivalensklasserna.

5b. Relationer. ***OBS! – Lös högst en av 5a och 5b. Löser ni båda rättas ingen!*** Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom följande

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a + k^2 = b.$$

Ge en fullständig utredning av vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet som den här relationen har. Om relationen har en av dessa egenskaper, bevisa detta, om relationen saknar en av dessa egenskaper ge exempel som illustrerar att så är fallet. (Alla egenskaper ska förstås utredas.)

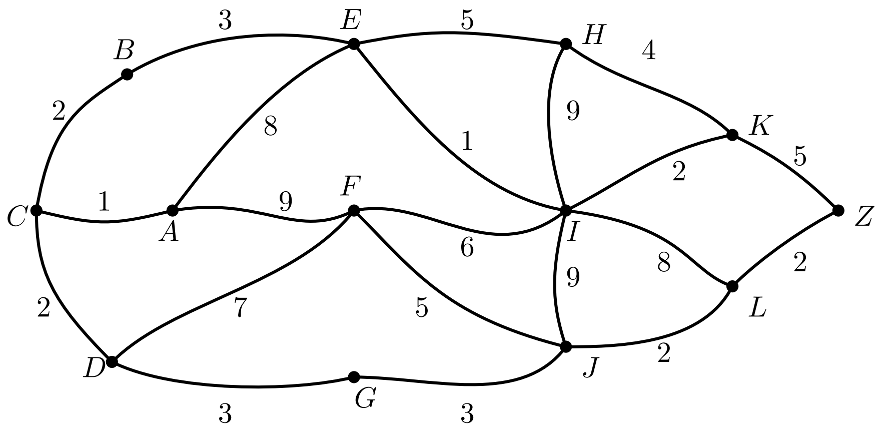
6. Fördjupad talteori. Visa, med matematisk induktion, utan att använda kongruensräkning att

$$3 | (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} (4k - 1)$$

för alla heltal $n \geq 1$.

Ledning: Vi uppfattar det som välkänt att $2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$, det får alltså användas i lösningen utan vidare motivering. Skriv först om påståendet utan summatecken innan du inleder induktionsbeviset.

7. Grafteori. Finn i nedanstående viktade graf den billigaste vägen från A till Z genom att använda Dijkstras algoritm. Ange alla etiketter för alla hörn men även alla kandidatetiketter i alla delsteg av algoritmen.



8. Kombinatorik. En av de mest meningsfulla aktiviteter som finns är att placera färgade kulor i urnor och vi ska nu, till vår stora glädje, studera en sådan aktivitet. Vi antar att vi har tre urnor, U_1, U_2, U_3 och ska placera en gul kula, tre identiska blå kulor och tre identiska röda kulor i dessa urnor. Men vi ska först ange två regler för hur själva placerandet får gå till:

1. Den gula kulan får läggas hur som helst, i vilken urna som helst.
2. Ingen urna får innehålla både blåa och röda kulor, men annars får också de blåa och röda kulorna läggas hur som helst.

Beräkna totala antalet sätt att placera alla kulor om båda dessa regler ska följas.

9. Sannolikhetslära. Vi tar en vanlig sexsidig tärning som vi kallar T och vi betraktar en slumpprocess som har två steg.

1. Vi kastar T en gång och adderar resultatet till en summa S. ($S = 0$ från början.)
2. Om första kastet av T ger ett udda utfall, det vill säga något av resultaten 1, 3 eller 5 kastar vi T en gång till och lägger det nya resultatet till S.

Beräkna sannolikheten att S efter dessa steg är större än eller lika med 6.

Exempel: Om första kastet ger 3 (som är udda) så kastar vi en gång till, om vi då får 5 så är $S = 3 + 5 = 8$. Om vi i första kastet istället hade fått 2 (som är jämnt) ska vi inte slå igen utan då stannar S på 2.