Kontrollskrivning 3 – CM1000, Diskret Matematik, HT2021

Tillåtna hjälpmedel är ett A4-ark med egna anteckningar från kursen. Anteckningar får finnas på båda sidor av arket. Ingen miniräknare är tillåten.

Skrivtiden är 1 timme och 45 minuter med start 14:15 och sista inlämning 16:00. Sent inlämnade skrivningar rättas inte. (Några har förlängd skrivtid och motsvarande för dem klockslag är 17.00.) Fullständiga lösningar krävs till alla uppgifter. Till denna KS hör ingen muntlig tentamen.

3. Funktioner. Beteckna med I mängden av ickenegativa reella tal < 1, det vill säga $I = \{x : 0 \leq x < 1\}$. Definiera funktionen $f : I \times I \to I$ genom

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Är funktionen f injektiv? Surjektiv? Bevisa dina påståenden.

Lösning: Funktionen är *inte injektiv* eftersom vi har

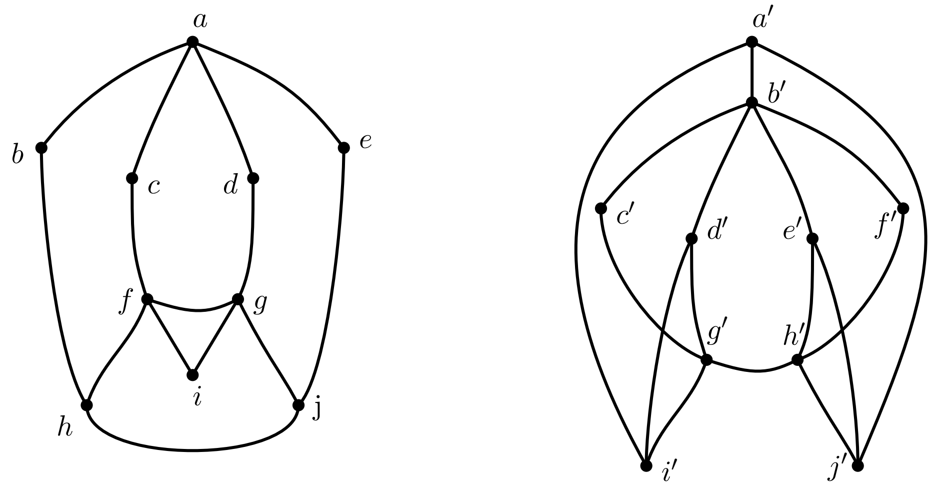
$$f(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{1/4 + 3/4}{1 + 1/4 \cdot 3/4} = \frac{3/4 + 1/4}{1 + 3/4 \cdot 1/4} = f(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$$

och $(1/4, 3/4) \neq (3/4, 1/4)$. Vidare är funktionen surjektiv eftersom vi för ett godtyckligt $z \in I$ har

$$f(z, 0) = \frac{z + 0}{1 + z \cdot 0} = z$$

så att f alltså antar alla värden $z \in I$.

7. Grafteori. Betrakta nedanstående två grafer.



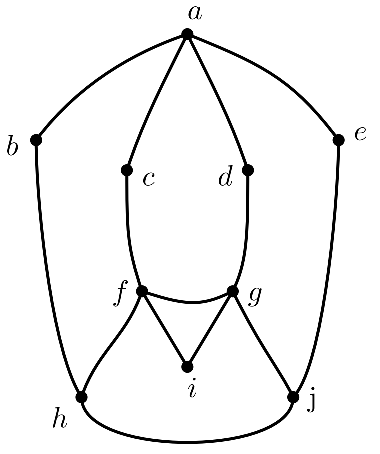
Ange en ny graf G som har följande egenskaper:

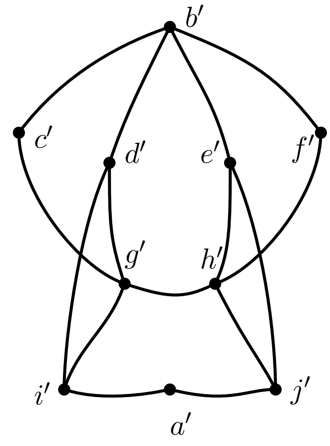
1. G är delgraf av båda graferna.
2. G är så stor som möjligt i den meningen att om någon annan graf G' är delgraf av båda graferna så är också denna nya graf mindre än G, det vill säga G' är delgraf av G.

Du behöver inte ge ett formellt bevis av att den graf som du kommer fram till har dessa egenskaper, det räcker med att ge ett troligt (men detaljerat!) resonemang som ger ett förslag på en graf av det sökta slaget.

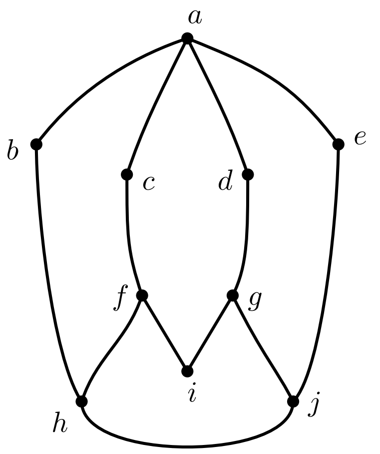
Lösning: Om vi vill ha en så stor delgraf som möjligt så kan vi försöka hitta en delgraf G som innehåller *alla* hörn och vi kan söka denna graf genom att att utgå från de båda graferna ovan och ta bort ett minimalt antal kanter tills vi når två grafer som är isomorfa. Dessa två isomorfa grafer kan då uppfattas som den delgraf som vi söker. Vi ändrar alltså på båda graferna och gör så små förändringar som möjligt i en strävan att graferna ska blir mindre och sammanfalla.

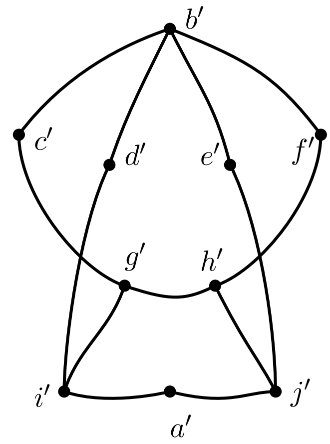
Fördenskull observerar vi att hörnet b' har graden 5 och ingår i toppen på ett slags paraplystruktur, det ser liknande ut i grafen till vänster, hörnet a är i toppen av en paraplystruktur, men a har graden 4. Dock om vi tar bort kanten $a'b'$ i grafen till höger och ritar hörnet a' underst istället så uppkommer följande figur:





Graferna är inte helt överenstämmande ännu, men om vi grafen till vänster tar bort kanten fg och i grafen till höger tar bort kanterna $d'g'$ och $e'h'$ så övergår graferna i det som beskrivs av nedanstående figur





Och detta är i själva verket samma graf, en isomorfi ges av

$$\phi = \{(a, b'), (b, c'), (c, d'), (d, e'), (e, f'), (f, i'), (g, j'), (h, g'), (j, h'), (i, a')\}$$

Vi kan då också uppfatta denna graf som den sökta delgrafen. Den är troligtvis störst eftersom vi behållt alla hörn i borttagningsprocessen.

8. Kombinatorik. Betrakta uttrycket

$$16\left(x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^n.$$

Ange ett heltal $n > 0$ för vilket konstanttermen i uttrycket är ett heltal.

Lösning: För att hitta konstanttermen använder vi binomialsatsen för att utveckla parentesen, vi får då att uttrycket ges av

$$16\left(x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^n = 16\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^k \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3}\right)^{n-k}.$$

Eftersom vi bara studerar termer i den här summan släpper vi nu summatecknet och betraktar uttrycket för en term i summan, det är

$$16\binom{n}{k}x^{2k} \cdot (-1/2)^{n-k} \cdot x^{-3(n-k)} = 2^4\binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \cdot 2^{k-n}x^{2k} \cdot x^{-3(n-k)} = \binom{n}{k} \cdot (-1)^{n-k} \cdot 2^{4+k-n}x^{5k-3n}.$$

Vi är intresserade av att hitta ett heltal $n > 0$ för vilket detta uttryck är ett heltal då samtidigt $5k - 3n = 0 \Leftrightarrow 5k = 3n$. Vi observerar också att faktorn $(-1)^{n-k}$ inte har någon betydelse för om uttrycket är ett heltal så svaret på vår fråga är precis samma svar på frågan "finn ett heltal $n > 0$ för vilket

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{4+k-n}x^{5k-3n}$$

är ett heltal då $5k = 3n$". Vi kan hitta detta genom att prova oss fram. Vi ser att $3n$ alltid måste vara delbart med 5, så n måste vara delbart med 5, fungerar $n = 5$? $5k = 3n$ ger då $k = 3$ och

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{4+k-n} x^{5k-3n} = \binom{5}{3} \cdot 2^{4+3-5} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 2^3 = 5 \cdot 2^3 = 40$$

som tydligen är ett heltal skilt från noll, alltså duger $n = 5$.

9. Sannolikhetslära. Låt A, B vara två oberoende händelser med lika sannolikhet i ett utfallsrum S och antag att $P(A \cap B) = d > 0$. Beräkna $P((A \cup B)^c)$ uttryckt i d.

Lösning: Eftersom A, B är lika sannolika så kan vi skriva $P(A) = P(B) = x$, där $0 \leq x \leq 1$. Eftersom $d = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = x \cdot x = x^2$ får vi tydligen $x = P(A) = P(B) = \sqrt{d}$. Nu kan vi skriva

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + x - d = 2\sqrt{d} - d$$

vilket ger

$$P((A \cup B)^c) = 1 - (2\sqrt{d} - d) = 1 - 2\sqrt{d} + d = (1 - \sqrt{d})^2.$$

Alternativ lösning: Eftersom A, B är oberoende så är också A^c och B^c oberoende. Det betyder att

$$P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c)) = P(A^c) \cdot P(B^c) = (1 - \sqrt{d}) \cdot (1 - \sqrt{d}).$$