Föreläsning 12 i ADK

Grafer: minimala spännande träd

Stefan Nilsson

KTH

Minimalt spännande träd i viktad graf

- Ett spännande träd för en graf G är en delgraf till G som är ett träd (sammanhängande, har inga cykler) och innehåller alla hörn i G.
- Vikten för ett spännande träd är summan av dom ingående kanternas vikter.
- Ett spännande träd med minimal vikt kan beräknas med exempelvis **Prims algoritm** eller **Kruskals algoritm**.

Minimalt spännande träd i viktad graf, Prim

Prims algoritm:
Indata: Graf $G = \langle V, E \rangle$, kantvikter $f : E \to \mathbb{R}$, starthörn s
Utdata: Ett minimalt spännande träd för G lagrat med förälderpekare $\pi(u)$

```
function PRIM(V,E,f,s)
    Q ← V
    for varje u ∈ Q do
        key[u] ← ∞
    key[s] ← 0                                   ▷ (Q är en heap med s överst)
    π[s] ← NIL
    while Q ≠ ∅ do
        u ← HEAPEXTRACTMIN(Q)
        for varje granne v till u do
            if v ∈ Q and f(u,v) < key[v] then
                π[v] ← u
                key[v] ← f(u,v)             ▷ (Här måste v flyttas i heapen)
```

Tidskomplexitet: $\mathcal{O}(|V| \log |V| + |E| \log |V|) = \mathcal{O}(|E| \log |V|)$

Minimalt spännande träd i viktad graf, Kruskal

Kruskals algoritm:
Indata: Graf $G = \langle V, E \rangle$, kantvikter $f : E \to \mathbb{R}$
Utdata: Minimalt spännande träd för G lagrat som en kantmängd $A \subseteq E$

function $\textsc{Kruskal}(V, E, f)$
    $A \leftarrow \emptyset$
    for varje $u \in V$ **do**
        $\textsc{MakeSet}(u)$
    Sortera kanterna i E efter stigande vikt
    for varje kant $(u, v) \in E$ i stigande viktsordning **do**
        if $\textsc{FindSet}(u) \neq \textsc{FindSet}(v)$ **then**
            $A \leftarrow A \cup \{(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$
            $\textsc{Union}(u, v)$
    return A

Minimalt spännande träd i viktad graf, Kruskal

Komplexitetsanalys:

- $\textsc{MakeSet}(u)$ tar tid $\mathcal{O}(1)$
- $\textsc{FindSet}$ och $\textsc{Union}$ tar tid $\mathcal{O}(\log |V|)$
- sorteringen av E tar tid $\mathcal{O}(|E| \log |E|)$

Totalt: $\mathcal{O}(|V| \cdot 1 + |E| \log |E| + |E| \log |V|) = \mathcal{O}(|E| \log |E|)$ om grafen är sammanhängande

Korrekthet för Prim och Kruskal

Idé: Visa att varje kant som läggs till i algoritmen är säker, d.v.s. ingår i något MST.

Definitioner:

- Ett **snitt** (cut) är en delning av V i S och $V - S$.
- En kant **korsar** snittet om en änden $\in S$ och andra $\in V - S$

Sats: Givet $G = \langle V,E \rangle$, $f : E \to \mathbb{R}$, $A \subseteq E$, $S \subseteq V$. Om

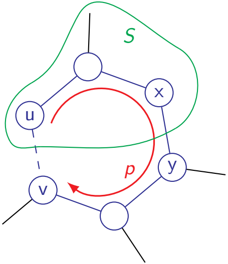
- Det finns ett MST som innehåller A
- Ingen kant i A korsar snittet $(S, V - S)$
- (u,v) är den lättaste kant som korsar snittet

Så är (u,v) säker att lägga till, d.v.s. det finns ett MST som innehåller $A \cup \{(u,v)\}$

Korrekthet för Prim och Kruskal

Bevis: Låt T vara MST som innehåller A men inte (u,v). Konstruera T' som är ett MST och innehåller $A \cup \{(u,v)\}$:

- T innehåller stig p mellan u och v
- Det finns kant (x,y) i p som korsar snittet
- Låt $T' = T \cup \{(u,v)\} - \{(x,y)\}$
- T' är uppenbart ett spännande träd
- (u,v) är den lättaste korsande kanten $\Rightarrow$ $f(u,v) \leqslant f(x,y) \Rightarrow |T'| \leqslant |T| \Rightarrow T'$ är MST



Problem: minimera körsträckan

Man har mätt längden av varje vägsträcka i Sverige och stoppat in denna information i en databas.

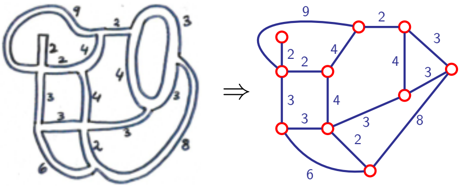
Nu vill en person veta exakt hur han ska köra från Hudiksvall till Grythyttan för att körsträckan ska bli så liten som möjligt

1. Formulera problemet matematiskt
2. Hitta en effektiv algoritm som löser problemet

Körsträckeproblemet som grafproblem

- Låt varje vägskäl motsvaras av ett hörn och varje väg (mellan två vägskäl) motsvaras av en kant
- Märk varje kant med motsvarande vägsträckas längd (viktfunktion kanter $\to \mathbb{N}$)

Exempel:



Problemformulering:
Givet en graf $G = \langle V, E \rangle$, en kantviktfunktion $f : E \to \mathbb{N}$, två hörn $s \in V$ och $t \in V$, hitta en stig i G från s till t vars sammanlagda kantviktsumma är minimal

Algoritm för grafproblemet "Kortaste stig"

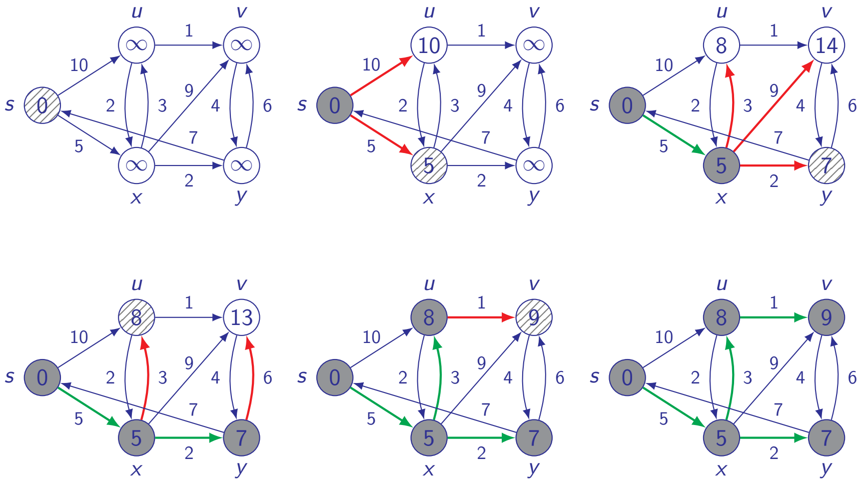
Dijkstras algoritm:
Indata: $G = \langle V, E \rangle$, $f : E \to \mathbb{N}$, $s \in V$, $t \in V$
Utdata: Längden av den kortaste stigen i G från s till t

- Märk varje hörn med det hittills kortaste kända avståndet från s
- Upprätta en mängd S med dom hörn till vilka den optimala kortaste stigen är känd

Algoritm:

1. För varje hörn $u \in V$:
   Om $(s,u) \in E$ märk u med $f(s,u)$ annars märk u med ∞
2. Märk s med 0 och låt $S = \{s\}$
3. Så länge $t \notin S$:
   Utvidga S med det hörn som är märkt med det kortaste avståndet och uppdatera hörnmärkningen
4. Returnera avståndet som t är märkt med

Exempel på Dijkstras algoritm



Analys av Dijkstras algoritm

- S utvidgas $|V|$ gånger (högst)
- Vid varje utvidgning letar man upp det hörn som är märkt med kortaste avståndet: $\mathcal{O}(|V|)$
- Uppdatering av hörnmärkningen görs högst en gång för varje kant i grafen: $\mathcal{O}(|E|)$
- Initiering av S och märkningen tar tid $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Totalt: $\mathcal{O}(|V|^2 + |E| + |V| + |E|) = \mathcal{O}(|V|^2)$ (eftersom $|E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$)

Korrekthet för Dijkstras algoritm

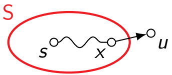
- Låt $\delta(s,v)$ vara det kortaste avståndet från s till v
- Låt $d[v]$ vara hörnets v-s märkning i ett läge i algoritmen

Bevisskiss:

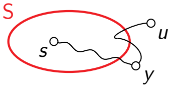
Notera att $d[v] \geqslant \delta(s,v)$ alltid gäller för alla hörn

Induktion över S:

- **Basfall:** $S = \{s\}$, $d[s] = 0$, $d(s,s) = 0$
- **Induktionssteg:** Visa att om $d[u] = \delta(s,v)$ för alla $v \in S$ när u just ska läggas till S så är $d[u] = \delta(s,u)$
  1. Kortaste stigen från s till u går helt inuti S utom sista kanten (x,u).
     Antagandet $\Rightarrow d[x] = \delta(s,x)$
     Algoritmen satte $d[u] = d[x] + f(x,u) =$
     $\delta(s,x) + f(x,u) = \delta(s,u)$



  2. Låt y vara första hörnet utanför S i kortaste stigen från s till u
     Fall 1 $\Rightarrow d[y] = \delta(s,y) \leqslant \delta(s,u)$
     Algoritmen lägger till u före $y \Rightarrow d[u] \leqslant d[y]$
     Vi har nu: $d[y] \leqslant \delta(s,u) \leqslant d[u] \leqslant d[y] \Rightarrow$
     $d[y] = \delta(s,u) = d[u]$



Alla hörn som kan nås från s kommer med i S. övriga har $d[v] = \infty$