

Lös ekvationen  $|e^x - 1| = 3$

Lös olikheten  $|x+1| > 2x$

- $|e^x - 1| = 3$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 3 \quad \vee \quad e^x - 1 = -3$

- $e^x - 1 = 3 \Rightarrow e^x = 4 \quad x = \ln 4$

- $e^x - 1 = -3 \Rightarrow e^x = -2$  sakna lösning

Svar:  $x = \ln 4$

---

- $|x+1| > 2x \quad (*)$

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^{x}$$
$$J_I = (-\infty, -1) \quad J_{II} = [-1, \infty)$$

- Vi löser först  $(*)$  på  $J_I$

Där gäller  $(x+1) < 0$

så  $|x+1| = -(x+1)$

och  $(*) \Rightarrow$

$$-(x+1) > 2x$$

$$-x-1 > 2x$$

$$-1 > 3x$$

$$\Leftrightarrow x < -1/3$$

uppfyller för  $\forall x \in \mathbb{I}$ ,  
 så vi får lösningsmängd

$$L_1 = \mathbb{I}_1 = (-\infty, -1) \text{ på } \mathbb{I}_1$$

$$\text{På } \mathbb{I}_2 = [-1, \infty) \text{ är}$$

$$(x+1) \geq 0 \text{ så } |x+1| = (x+1)$$

$$\text{och } (x+1) > 2x$$

$$(x+1) > 2x$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

så lösningsmängd  $L_2$  på  $\mathbb{I}_2$

$$\text{är } L_2 = [-1, 1)$$

Samlar lösningarna

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \\ = (-\infty, 1)$$



## Modellbanta 2

### Uppg 5.

Lös olikheten  $\frac{x^2+x}{3} \geq \frac{4x}{2-x}$

---

$$\frac{x^2+x}{3} \geq \frac{4x}{2-x} \iff$$

$$\frac{x^2+x}{3} - \frac{4x}{2-x} \geq 0 \iff$$

$$\frac{(x^2+x)(2-x) - 3 \cdot 4x}{3(2-x)} \geq 0 \iff$$

$$\frac{2x^2 - x^2 - x^3 + 2x - 12x}{3(2-x)} \geq 0 \iff$$

$$- \frac{x^3 - x^2 + 10x}{3(2-x)} \geq 0 \iff$$

$$\frac{x(x^2 - x + 10)}{3(x-2)} \geq 0 \iff$$

$x^2 - x + 10$  saknar reella nollställen

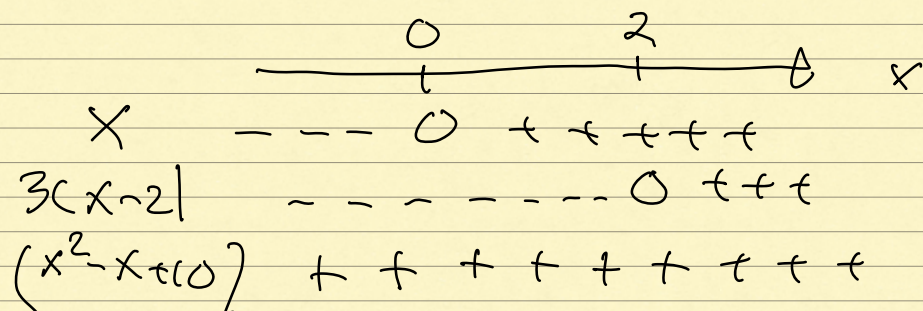
$$(x^2 - x + 10 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 10})$$

och eftersom c.ex

$$(x^2 - x + 10)|_{x=0} = 10 > 0$$

Är  $x^2 - x + 10 > 0$  för alla  $x$ .

Vi studerar olikheten med betecknabell



$$\frac{x(x^2 - x + 10)}{3(x-2)} \quad \begin{array}{c} \text{ej def.} \end{array}$$

$$\text{Så } \frac{x(x^2 - x + 10)}{3(x-2)} \geq 0 \quad \text{förl}$$

$$x \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$$



24/10-19

uppgift 8

Lös olikheten

$$\sqrt{x - \frac{1}{16}} \geq x$$

---

• Inga lösningar på  $(-\infty, \frac{1}{16})$

(t.ex.  $\sqrt{x - \frac{1}{16}}$  odef. där).

vi kan anta, och måste  
kräva att  $x \geq \frac{1}{16}$ .

$$\sqrt{x - \frac{1}{16}} \geq x$$

Om V.L.  $\geq 0$ , H.L.  $\geq 0$

$$(V.L. \geq H.L.) \Rightarrow (V.L.)^2 \geq (H.L.)^2$$

så ekvivalent olikhet är

$$x - \frac{1}{16} \geq x^2$$

~~A~~

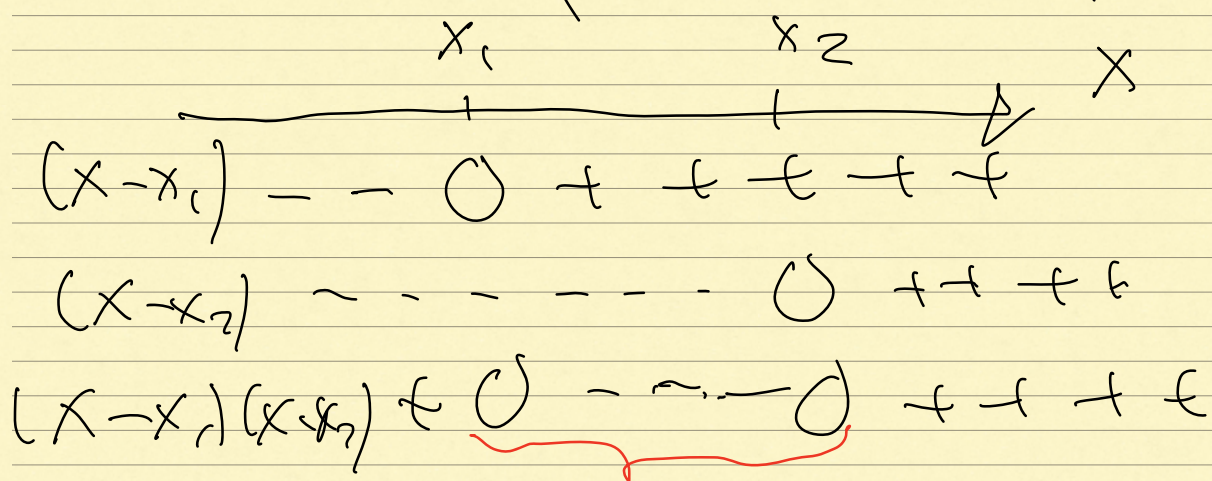
$$x^2 - x + 1/16 \leq 0$$

Fakt. av v-l. m. h. a.

Pq-formeln ger

$$\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}\right) \left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) \leq 0$$

$x_1 \qquad x_2$



Måste kontrollera att  $x_1 \geq 1/16$

$$x_1 - 1/16 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3} - 1}{16} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{16}$$



$$7^2 = 49 \quad (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$$

$$\text{sc} \quad 7^2 > (4\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow 7 > 4\sqrt{3}$$

$$\text{sc} \quad x_1 - 1/16 > 0$$

$$\text{sc} \quad x_1 > 1/16$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in \left[ \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{4} \right]$$

Modellbenta 2

Del II : 2

a) Låt  $a > 0, a \neq 1, a \in \mathbb{R}$ .

Visa att

$$\log_a x = r \log_{a^r} x$$

för alla  $r > 0$  och alla  $x > 0$ .

b) Lös ekvationen

$$\log_2 x + \log_3 x = 8$$

---

$$c) \left( \log_2 x = 3 \log_{2^3} x \right)$$

Sätt

$$y = r \log_{a^r} x$$

$$\Rightarrow y = \log_{a^r} x^r$$

u



$$\begin{array}{l} \text{def} \\ \text{a.u.} \\ \log_r \end{array} \quad (a^r)^u = x^r$$

$$\text{a.u.} \quad (a^{ry}) = x^r$$

$$\text{a.u.} \quad (a^y)^r = x^r$$

$$\begin{array}{l} r > 0 \\ \text{a.u.} \end{array} \quad a^y = x$$

$$\text{a.u.} \quad y = \log_a x$$

$$\text{S.C.} \quad r \log_a x = \log_a x^r$$

U.S.B.

$$b) \log_2 x + \log_8 x = 8$$

End (al ~~se~~)

$$\log_{\sqrt{8}} x = \log_{2^3} x$$

$$= \frac{1}{3} (3 \log_{2^3} x)$$

$$\text{and} \quad = \frac{1}{3} \log_2 x$$

(a)

So the series

$$\log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 9$$

$$\frac{4}{3} \log_2 x = 9$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 2^6 = 64$$



Kontroll:  $X = 2^6 = 8^2$

$$V-L = \log_2 X + \log_8 X$$

$$= \log_2 2^6 + \log_8 8^2$$

$$= 6 + 2 = 8 = H_L$$

OK!

24/10-19

Bestäm alla  $x \in \mathbb{R}$  s.a.

6(b)

$$e^{2x} + e^x = 6$$

Se  $\ln$ -app  $\in \mathbb{C}$

Sätt  $t = e^x$ ,  $t > 0$ ,  $t^2 = e^{2x}$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

⋮



24/10-19

6 (a)

Bestäm alla  $x \in \mathbb{R}$   
s.a.

$$\sin x = \sin 3x$$

---

$$\sin u = \sin v$$

$\Leftrightarrow$

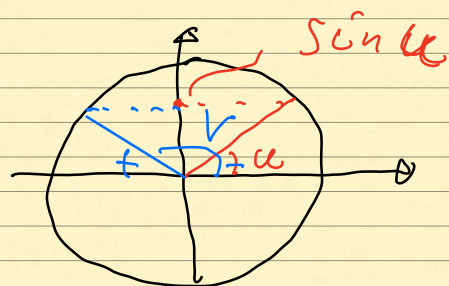
$$u = v + n \cdot 2\pi$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

eller

$$u = (\pi - v) + n \cdot 2\pi$$

---



$$\text{så } \sin x = \sin 3x$$

$\Leftrightarrow$

$$x = 3x + n \cdot 2\pi \quad (1)$$

$$\text{eller } x = (\pi - 3x) + n \cdot 2\pi \quad (2)$$

(1) ger

$$-2x = n \cdot 2\pi$$

$$\underline{x = (-n) \cdot \pi = m\pi} \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{Z} \\ m \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

(2) gel

$$x = \pi - 3x + n \cdot 2\pi$$

$$4x = \pi + n \cdot 2\pi$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}}}$$

Svar:  $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$

elle  $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Kontrollera genom insättning

c  $\sin x = \sin 3x$



Mattektenta

2, uppg 1

(a) & (b)

Beräkna  $(1+i)^8$   
med hjälp av

a) binomial satsen

b) de Moivre's formel

$$(a) (1+i)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 1^{8-k} i^k =$$

$$= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} i + \binom{8}{2} i^2 + \binom{8}{3} i^3 + \binom{8}{4} i^4 + \binom{8}{5} i^5 + \binom{8}{6} i^6 + \binom{8}{7} i^7 + \binom{8}{8} i^8$$

1  $i$   $(-1)$   $(-i)$  1  
 $i$   $(-1)$   $(-i)$  1

$$= \left( \binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8} \right)$$

$$+ i \left( \binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7} \right)$$

$$\cdot \binom{8}{1} = \binom{8}{7}, \quad \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

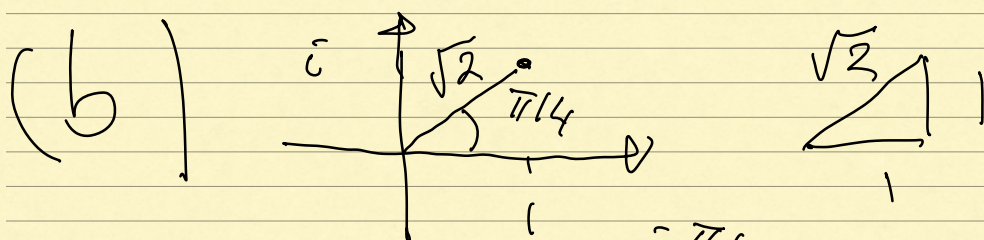
$$\cdot \binom{8}{0} = \binom{8}{8} = \frac{8!}{8!0!} = 1$$

$$\cdot \binom{8}{2} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

$$\cdot \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 70$$

Also  $\ddot{a}_r$

$$(1+i)^8 = (1 - 28 + 70 - 28 + 1) \\ = 72 - 56 = \underline{\underline{16}}$$



$$(1+i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2} e^{i\pi/4})^8$$

$$= (\sqrt{2})^8 \cdot (e^{i\pi/4})^8$$

$$= 2^4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4} \cdot 8}$$

$$= 16 \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_1 = \underline{\underline{16}}$$



Modell Kanta 2 } Bestäm  
uppg 1 (c) }  $\operatorname{Im} (2-3i)(1+i)^8$

$$\operatorname{Im} \left( (2-3i)(1+i)^8 \right)$$

$$= \operatorname{Im} (16(2-3i))$$

$$= \operatorname{Im} (32-48i) = \underline{\underline{-48}}$$

## Några Bevis tekniker

- Härledning:

Ex: Bevisa att

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\text{V.L.} = \cos 3x = \cos(2x+x)$$

$$= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \text{H.L.}$$

~~$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$~~

~~$$\cos(2x+x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$~~

~~$$\vdots$$~~



~~$$4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$~~

### • Motsägelse bevis:

Vill bevisa  $P$  är sant.

Visar  $\neg P$  leder till motsägelse

Modell tenta 2

Uppg II: 3

Låt  $p$  vara ett primtal.

Visa att  $\sqrt{p}$  är irrationellt.

Antag motsatsen, dvs

att det finns ett  $r \in \mathbb{Q}$

s.a.  $r^2 = p$  (dvs  $\sqrt{p} = r$ ).

Ett sådant  $r$  kan skrivas

$r = \frac{m}{n}$ ,  $m, n$  heltal  
utan gemensam faktor.

Då är

$$\frac{m^2}{n^2} = p \quad \text{och} \quad m^2 = p \cdot n^2$$

$p$  delar  $m^2$ , så  $p$  delar  $m^2 = m^2$ .

$\Rightarrow p$  delar  $m$  (tg  $p$  primtal)

Alltså är  $m = k p$ , ngt.  $k \in \mathbb{N}$ .

Vi har då

$$k^2 p^2 = p \cdot n^2 \Rightarrow k^2 \cdot p = n^2$$

Så  $p$  delar  $n^2 \Rightarrow p$  delar  $n$

Så  $n = l \cdot p$  ngt  $l \in \mathbb{N}$

Na är  $\frac{m}{n} = \frac{k p}{l p}$

FÖRKORTAD  
FORM

$\exists$   
FÖRKORTAD  
FORM

MOTSÄGELSE!

så antagandet FALSKT.

det  $\nexists r \in \mathbb{Q}$  så.  $r^2 = p$ .



## • Induktionsbevis.

För att bevisa att ett  
påstående  $P(n)$

som innehåller en heltalsvariabel  
 $n$ , är sant för alla  
 $n \geq N_0$ ,  $N_0$  är något heltal.

Visa att

- $P(N_0)$  sant.
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ,  $k \geq N_0$

Enligt INDUKTIONSPRINCIPEN  
är då  $P(n)$  sant  $\forall n \geq N_0$

Bevisa att

$$3^n > n^3 + 3n, \quad n \geq 4.$$

Låt  $P(n)$  vara påståendet  
" $3^n > n^3 + 3n$ ".

Vi bevisa först att  $P(4)$  är sant.

För  $n=4$  är

$$V.L. = 3^4 = 81$$

$$H.L. = 4^3 + 3 \cdot 4 = 64 + 12 = 76$$

$$\text{Så } V.L. > H.L. \text{ då } n=4$$

~~///~~

• Vi bevisa nu att

$$P(k) \Rightarrow P(k+1), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$k \geq 4$ .

dos vi bevisa att



$$\underline{3^k > k^3 + 3k \Rightarrow 3^{k+1} > (k+1)^3 + 3(k+1)}$$

So antag att  $3^k > k^3 + 3k$

vi bevisa, under detta  
antagandet, att

$$3^{k+1} - (k+1)^3 - 3(k+1) > 0$$

$$(\Rightarrow 3^{k+1} > (k+1)^3 + 3(k+1))$$

$$3^{k+1} - (k+1)^3 - 3(k+1) =$$

$$3 \cdot 3^k - (k+1)^3 - 3(k+1) \overset{\text{enl}}{>} \text{antagandet}$$

$$3(k^3 + 3k) - (k+1)^3 - 3(k+1) =$$

$$= 3k^3 + 9k - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 - 3k - 3$$

$$= 2k^3 - 3k^2 + 3k - 4$$

$$= (2k-3)k^2 + (3k-4) > 0 \quad \begin{matrix} \text{eftersom} \\ k \geq 4. \end{matrix}$$

Vi har visat att

$$P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall k \geq 4.$$

eftersom också  $P(4)$

är sant, ger

induktionsprincipen att

$P(n)$  är sant för alla

heltal  $n \geq 4$ .

V.S.B