

Seminarium 6

lnL. uppg 6 → Grupp I

1. (a) $e^{2x} + e^x = 6$

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Sätt $t = e^x$, då är $t > 0$ och $e^{2x} = t^2$.

Ekvation skrivs nu

$$t^2 + t - 6 = 0$$

...

$$\Leftrightarrow t = -3 \quad \vee \quad t = 2$$

men $t = e^x > 0$, så $t = 2$ enda relevanta lösning, som ger $x = \ln 2$.

WARNING:

$$e^{2x} + e^x = 6$$

$$\cancel{\vee \vee \ln e^{2x} + \ln e^x = \ln 6}$$

$$\cancel{2x + x = 6 \Rightarrow x = 2}$$

$$\ln(V.L.) = \ln(H.L.)$$

$$\ln(e^{2x} + e^x) = \ln 6$$

$$\neq \ln e^{2x} + \ln e^x$$

$$(b) (\ln x)^2 = \ln x^2 - \ln x$$

$$\Rightarrow (\ln x)^2 = 2 \ln x - \ln x$$

$$\Rightarrow \underline{(\ln x)^2 = \ln x}$$

$$\Rightarrow \ln x (\ln x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\ln x = 0} \vee \ln x = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 \vee x = e$$

Warning: $(\ln x)^2 = \ln x^2 - \ln x$

~~$$e^{(\ln x)^2} = e^{\ln x^2} - e^{\ln x} \checkmark$$~~

2.

Låt

$pH(\underline{X}) =$ pH-värde för ämne $\underline{X}$

$[H^+]_{\underline{X}} =$ H^+ -koncentration för ämne $\underline{X}$

Vi vet att

$$pH(A) = -\lg[H^+]_A = 7$$

För ämne B gäller

$$[H^+]_B = 10 [H^+]_A \quad \text{vilket ger}$$

$$pH(B) = -\lg[H^+]_B =$$

$$= -\lg(10 [H^+]_A)$$

$$= -(\lg 10 + \lg [H^+]_A)$$

$$= -\lg [H^+]_A - \lg 10$$

$$= pH(A) - 1$$

$$= 7 - 1 = 6$$

$$\text{pH}(c) \text{ (på samma sätt) } = 5$$

• Tänk på att använda tydlig notation och väl av symboler, och förklara när du inför nya symboler.

• Att skriva t.ex

$$A = \text{pH} = 7$$

är mycket förvirrande

då A är ett kemiskt ämne
 pH är en enhet
 7 är ett tal.

3. För vilka värden på a , b och c gäller att

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c ?$$

$$V.L. = \underbrace{(\log_b c)}_r \cdot \log_a b$$

$$= \log_a b^r = \log_a \left(b^{\log_b c} \right)$$

$$= \log_a c = H.L.$$

$\log_x y$ är def för $y > 0$

$0 < x < 1$ eller $x > 1$

dvs i värt fall

$$0 < a < 1, a > 1$$

$$b > 0, c > 0$$

Ett sätt att närma sig

uppgiften (om man inte "ser"
direkt ett bevis för att
formeln är sann)

är experimentera t.ex
genom att plotta kurvor

$y = \log_a b \log_b x$, $y = \log_a x$
för olika värden på $a \neq b$.

Allt bevis:

Visa $a^{V.L.} = a^{H.L.}$

$(a^t \text{ injektiv})$

$\implies V.L. = H.L.$

$$a^{V.L.} = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$$

$$= \left(\underbrace{a^{\log_a b}}_b \right)^{\log_b c} = c$$

$$a^{H.L.} = \dots = c$$

Specialfall av
formeln: (om $a=e$)

$$(\ln b) \cdot \log_b c = \ln c$$

$$\log_b c = \frac{\ln c}{\ln b}$$

4.

$$h(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

Naturlig definitionsmängd

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

Dålig
notation:

~~$$D_h \neq 1$$~~

~~$$D_h = \mathbb{R} \setminus 1$$~~

Tillhörande värdemängd V_h

$$V_h = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{1+x}{1-x}, \text{ ngt } x \in D_h \right\}$$

dvs $y \in V_h$ OMM det
finns som löser ekvation

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

Så för vilka y kan vi lösa
denna ekvation?

($x \neq 1$ i nedanstående)

$$y = \frac{1+x}{1-x} \iff$$

$$(1-x)y = 1+x \iff$$

$$y - xy = 1+x$$

$$y-1 = xy+x \iff$$

$$(y-1) = x(y+1)$$

Om $y \neq -1$ är detta ekvivalent med

$$x = \frac{y-1}{y+1}$$

dvs om $y \neq -1$ finns

exakt ett x s.a. $y = h(x)$,

nämligen $x = \frac{y-1}{y+1}$
 så $x \in V_h$ om $x \neq -1$.

Om $y = -1$ får vi i stället

$$(y-1)|_{y=-1} = x(y+1)|_{y=-1}$$

$$\iff -2 = x \cdot 0$$

en ekvation som saknar

lösningar, så $-1 \notin V_h$.

$$\begin{aligned} \underline{V_h} &= \{y \in \mathbb{R} : y \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ &= (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \end{aligned}$$

$h: D_h \rightarrow V_h$ enk ovan

$$h(x) = \frac{\cancel{1-x}}{1-x}$$

Räkningarna ovan visar
att $y = h(x)$ har exakt
en lösning, $x = \frac{y-1}{y+1}$
för alla $y \in V_h$.

• dvs h är injektiv

• Målmängd $= V_h =$ värdemängd
Så h är surjektiv

• så h är bijektiv
och alltså inverterbar,
med invers $h^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$
och

$$D_{h^{-1}} = V_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$V_{h^{-1}} = D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

kolla också

$$h(h^{-1}(x)) = \dots = x$$

$$h^{-1}(h(x)) = \dots = x.$$

⑤ Vi använder oss av

- L är en bijektion,
så speciellt är L en injektion

$$\text{dvs. } L(r) = L(s) \Rightarrow r = s$$

så för att visa formel

$$f(x) = g(x) \text{ räcker att}$$

$$\text{visa } L(f(x)) = L(g(x))$$

- $L^{-1} = E$

$$\text{dvs } L(E(t)) = t$$

- Räkne regler I - III för L .

① Bevis av $E(x+y) = E(x) + E(y)$

$$L(v.l.) = L(E(x+y)) = (x+y)$$

$$L(h.l.) = L(E(x) + E(y))$$

$$\stackrel{(I)}{=} L(E(x)) + L(E(y)) = x + y$$

(2) & (3) lissas

pa' liknamde sätel

$$\textcircled{G.} \quad A(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt$$

$$A: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \checkmark$$

(a) För varje ^{fikt} $x \in (0, \infty)$
 är $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt = \dots = \text{"tal"}$

, dvs A är en regel som
 till varje $x \in (0, \infty)$ ger
 precis ett värde $A(x)$.

• $y = \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ def för $t > 0$

• $\frac{1}{\sqrt{t^2+t}} > 0$

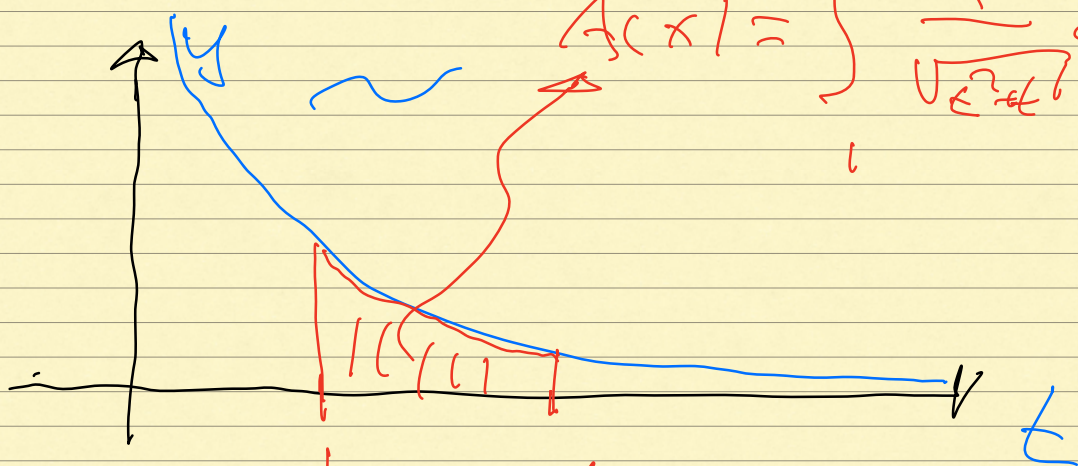
• antagande
 ju större t , mindre värde

$$y = \sqrt{t^2 + t}$$



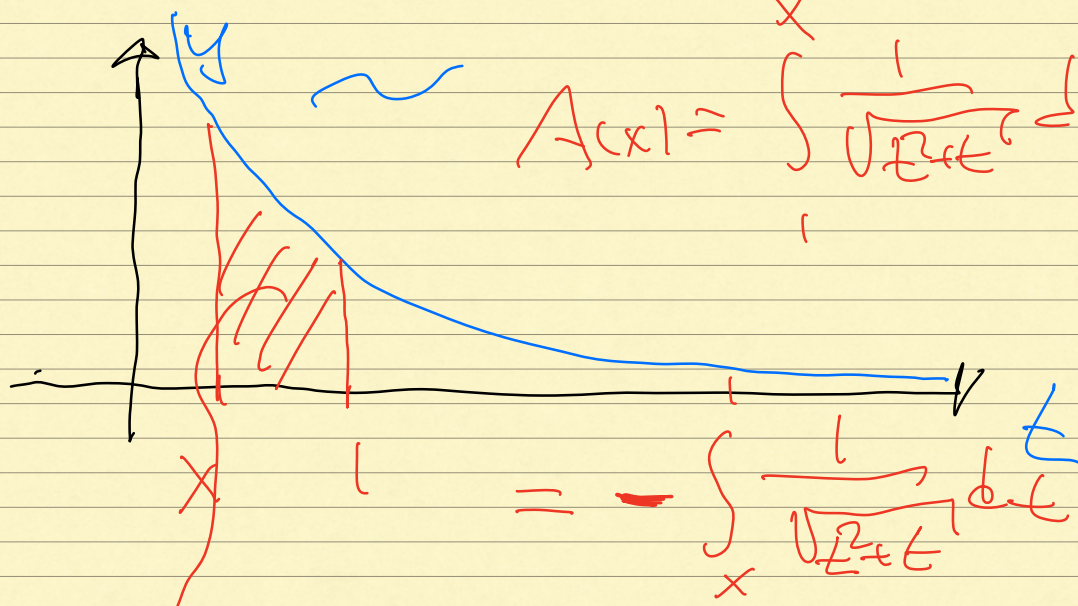
$x > 1$

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + t}} dt$$



$0 < x < 1$

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + t}} dt$$



$$= - \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + t}} dt$$

- $A(x)$

crean

Från detta kan man
se att

• $A(x) = 0 \iff x = 1$

$A(x) > 0 \iff x > 1$

$A(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

• $A(x)$ växande
och därmed injektiv,
(detaljen utelämnas här)

OBS: Att "räkna ut"

integralen med hjälp av
primitiv funktion är
inte nödvändigt,

Och också mycket
svårt att göra exakt.

Om du tror dig ha
fannit primitiv
funktionen $F(t)$ s.a.

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t+t^2}} dt = \left[F(t) \right]_1^x$$

$$= F(x) - F(1), \text{ s\u00e5}$$

pr\u00f6va d\u00e5 att

derivera $F(t)$,

s\u00e5 ser du nog att

$$F'(t) \neq \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$$

så F var ingen
primitiv tids alle.