

Föreläsning 14

SF 1661 HT 21

11/10



# Gränsvärden för

• Talföljder  $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

- serier  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

• Funktioner  $f(x)$

-  $x \rightarrow \infty$

-  $x \rightarrow a \neq \infty$

let derivatives definition



Ur läromedel för gymnasiet:

"Ett gränsvärde är det värde  
uttrycket eller funktionen antar,  
när variabeln närmar sig de- värde  
variabeln går emot" (Matematik 3 BC, eddler) ✓

"En funktions gränsvärde(n) är precis vad  
det låter som: ett värde som är en gräns.  
Funktionen kan inte anta några värden  
på andra sidan denna gräns"  
(gamla Pluggakatten.se)



# Talföljder

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Ex

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$



En talföljd  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

kan ses som en funktion:

---

$$a_n = a(n)$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow V$$

Ex:

$$a_n = a(n) = \frac{1}{n}$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$



Uppgift: Skriv ut några av de  
första elementen i talföljderna.

$$\{n^2\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$



Beispiel

$$\left\{ 1 - \frac{1}{3^n} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 1 - \frac{1}{3^0}, 1 - \frac{1}{3^1}, 1 - \frac{1}{3^2}, \dots \right\}$$

$$= \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots \right\}$$



Gränsvärden av talföljder - inledande exempel



# Gränsvärden av talföljder - inledande exempel

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$



# Gränsvärden av talföljder - inledande exempel

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\left\{ \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1$$

Konvergens



$$\{E_1^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$$

Gränsvärde existerar INTE

$$\{n^2\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

Gränsvärde existerar INTE

(men man skriver  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ , OGENFÖRLIGT GRÄNSVÄRDE)



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$$

---



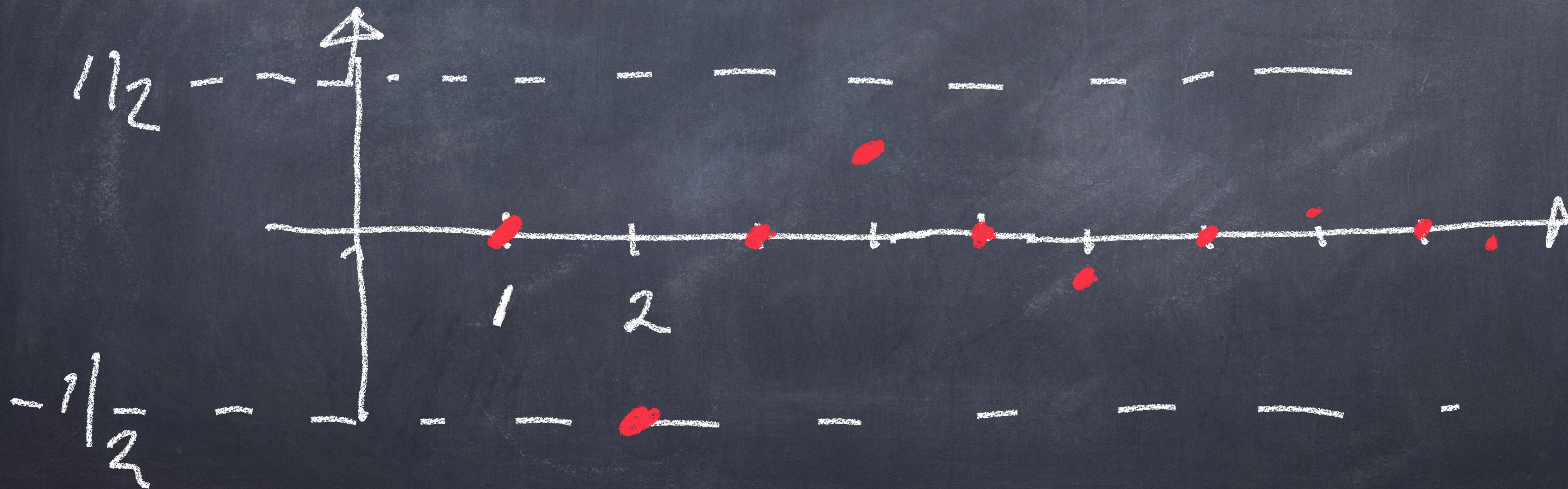


Hu ska vi  
definiera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

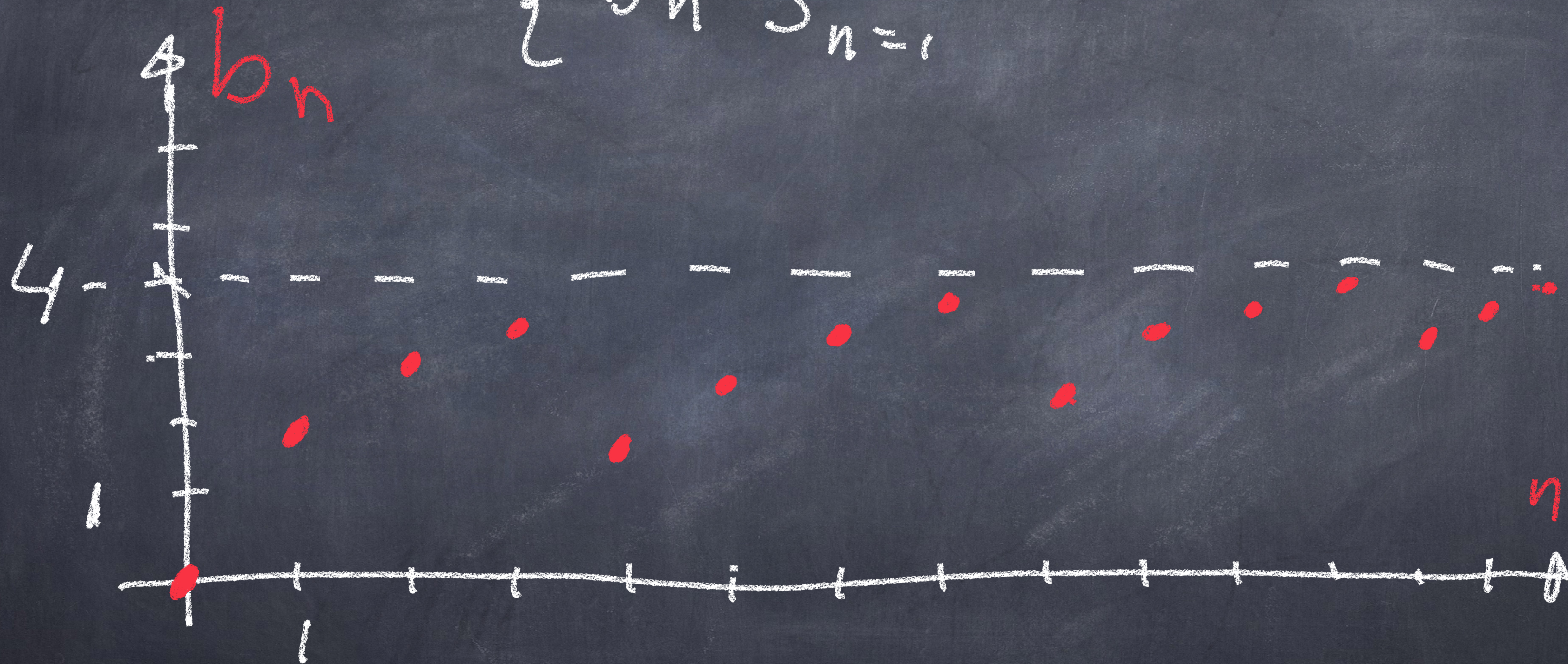


$$\left\{ \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \dots \right\}$$

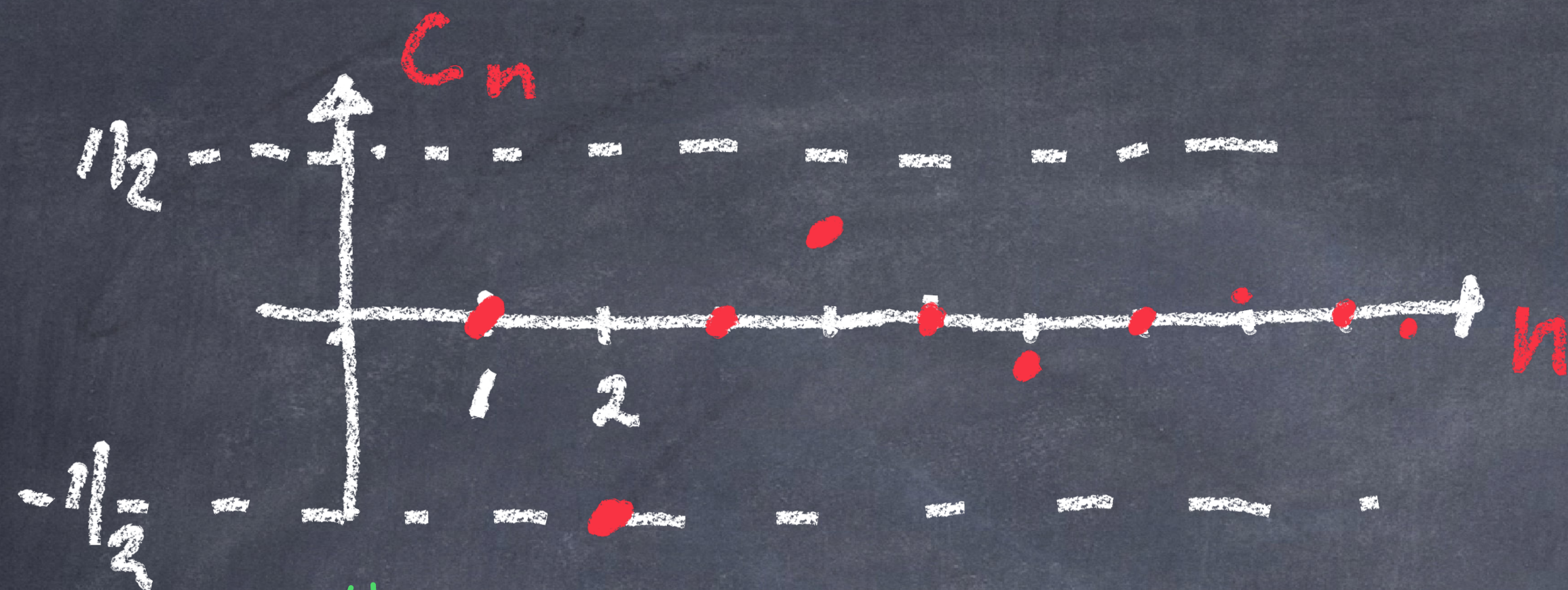




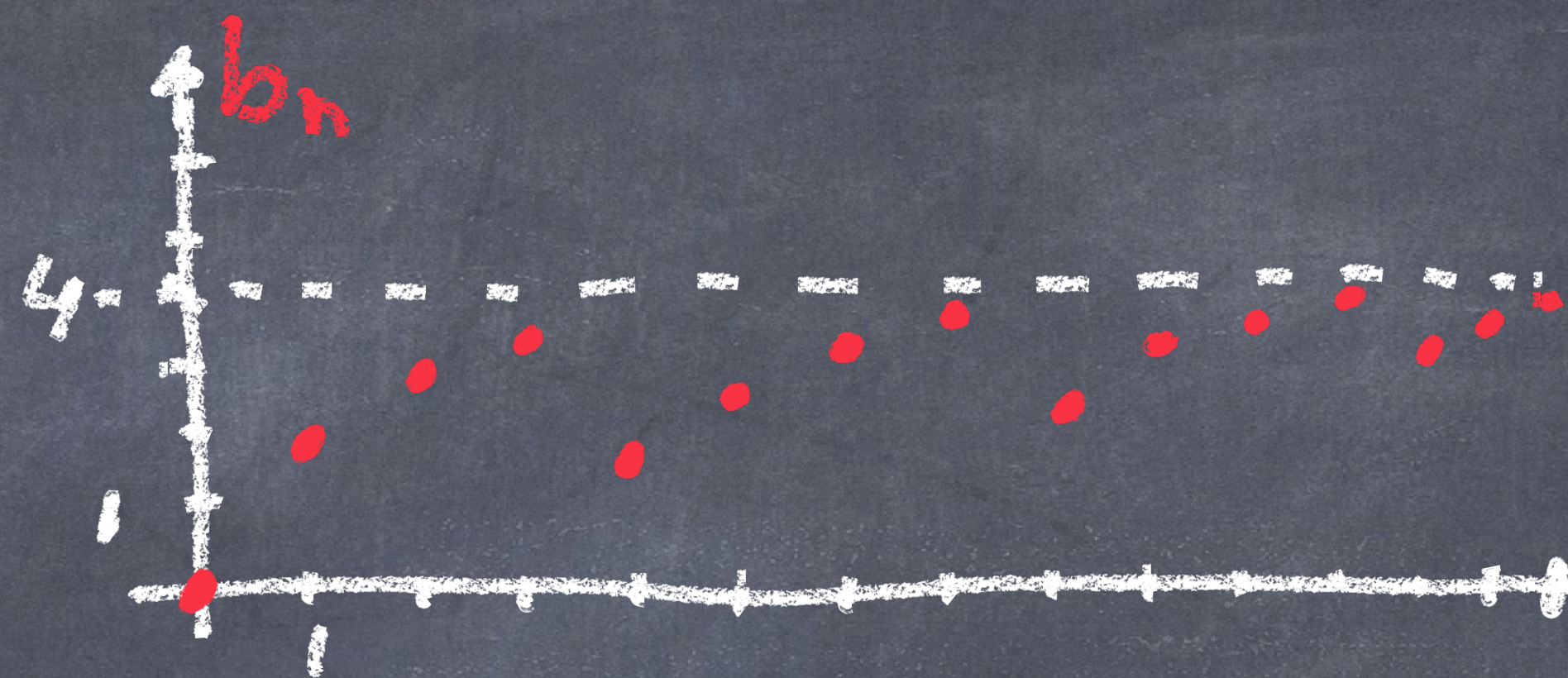
$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$$







"Voll n.a."  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$



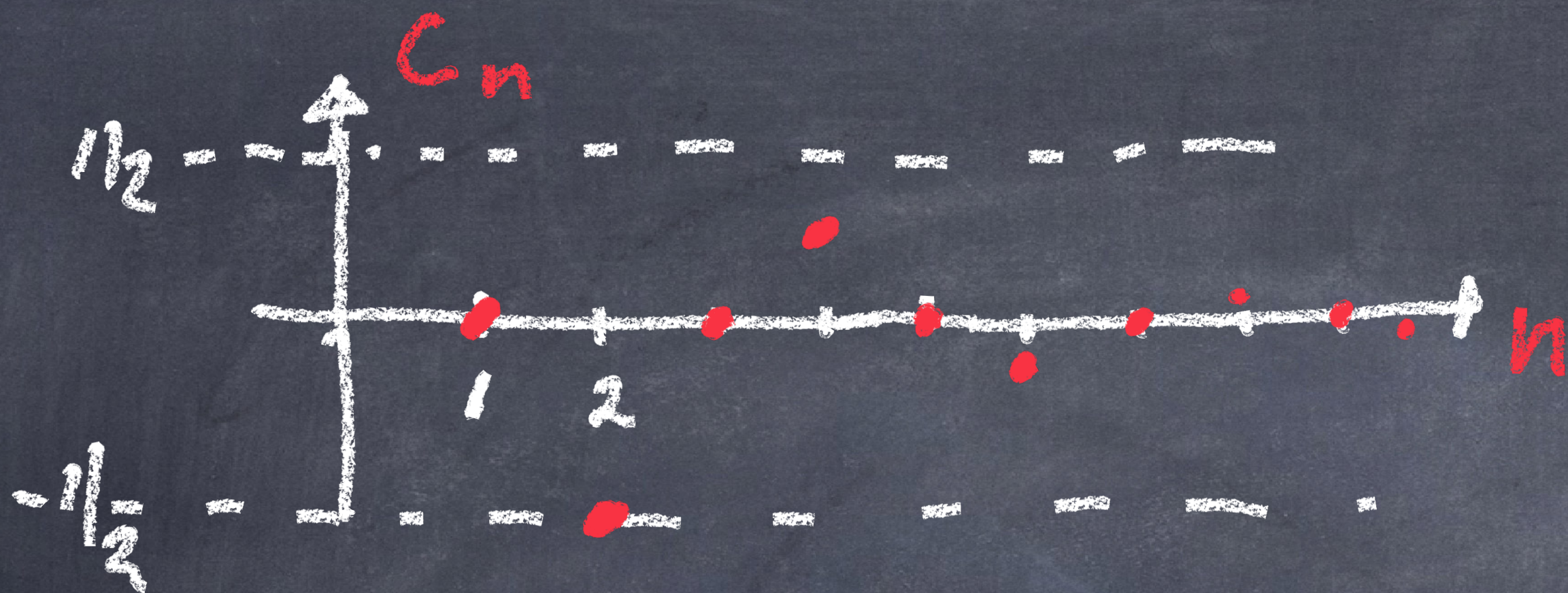
$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$

---

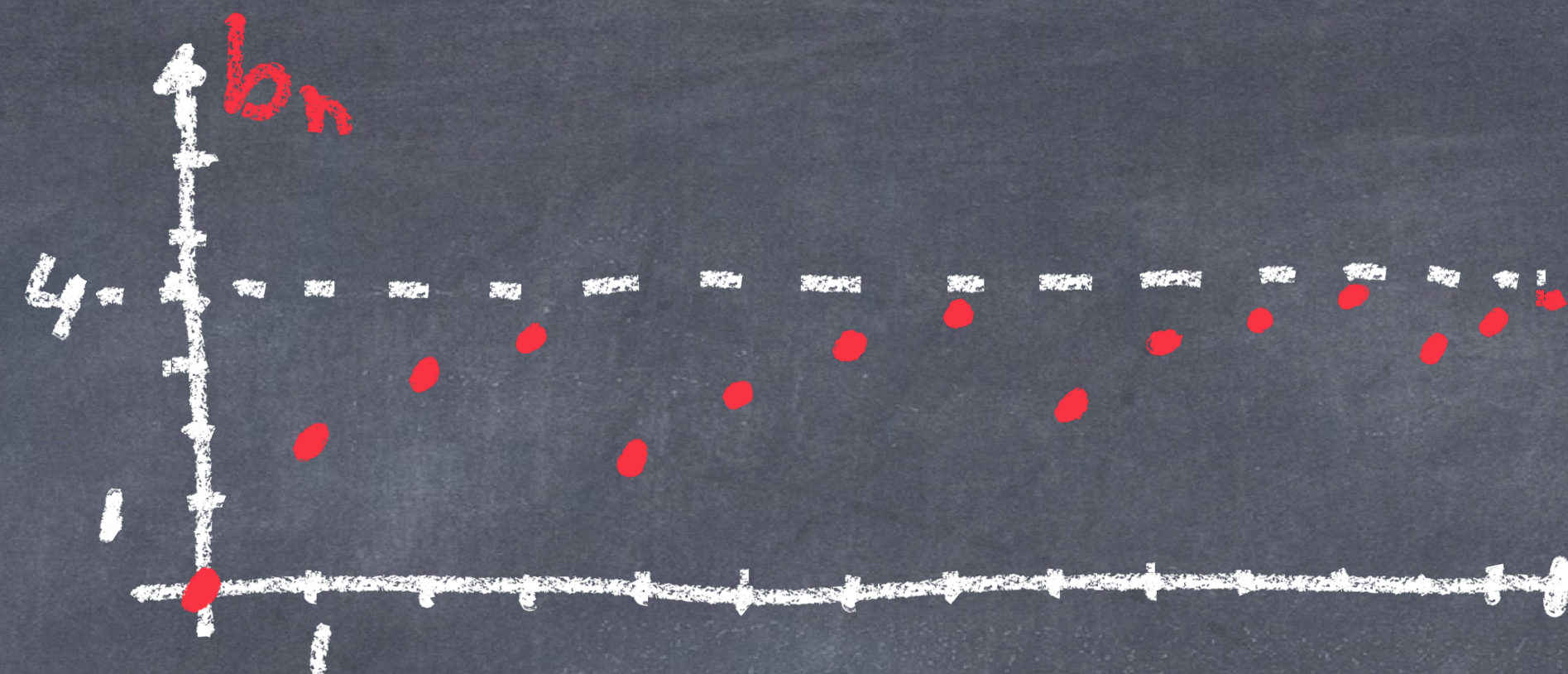
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

Vad menar vi?





$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

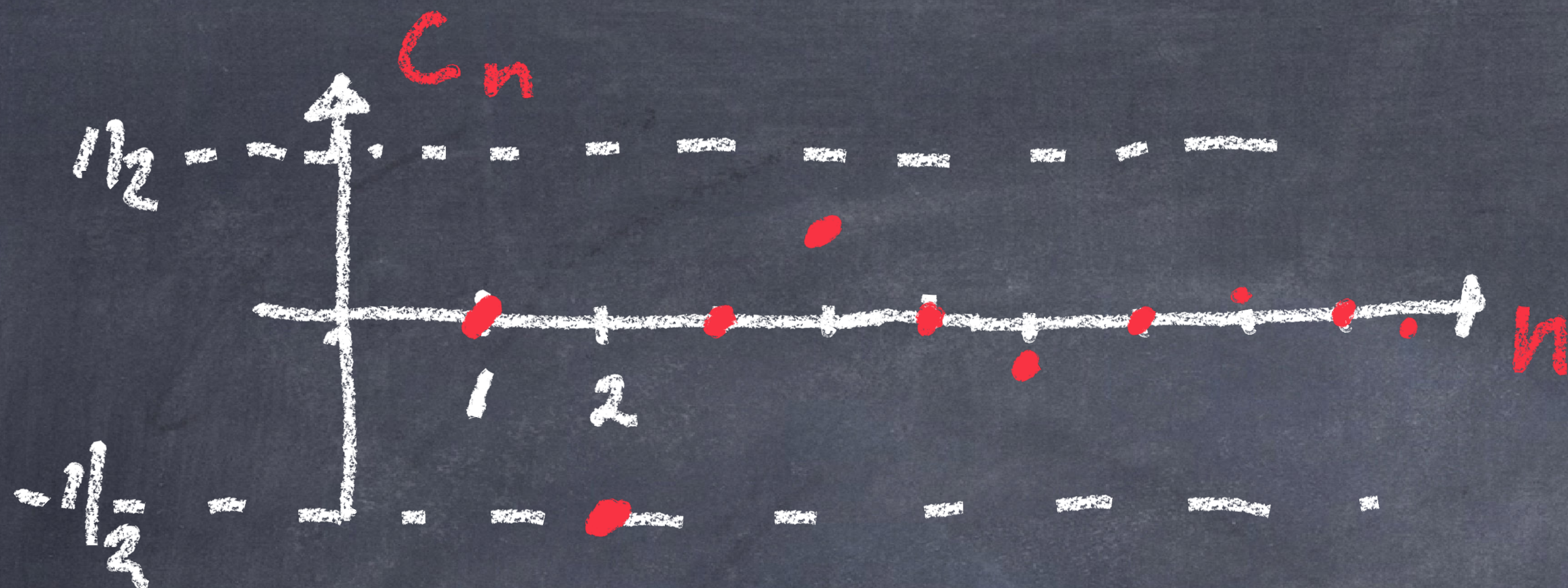


$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

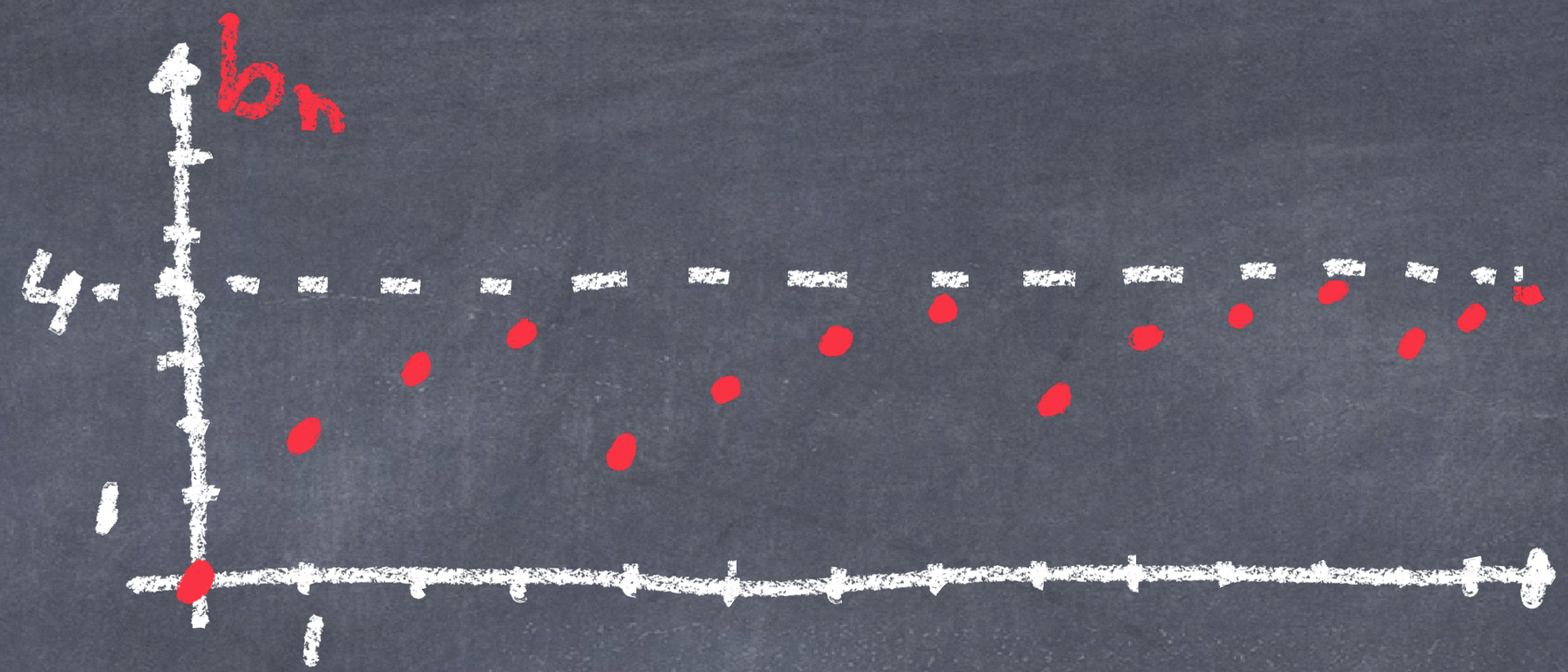
---

- "a\_n kommer närmare och närmare L  
je större n blir"





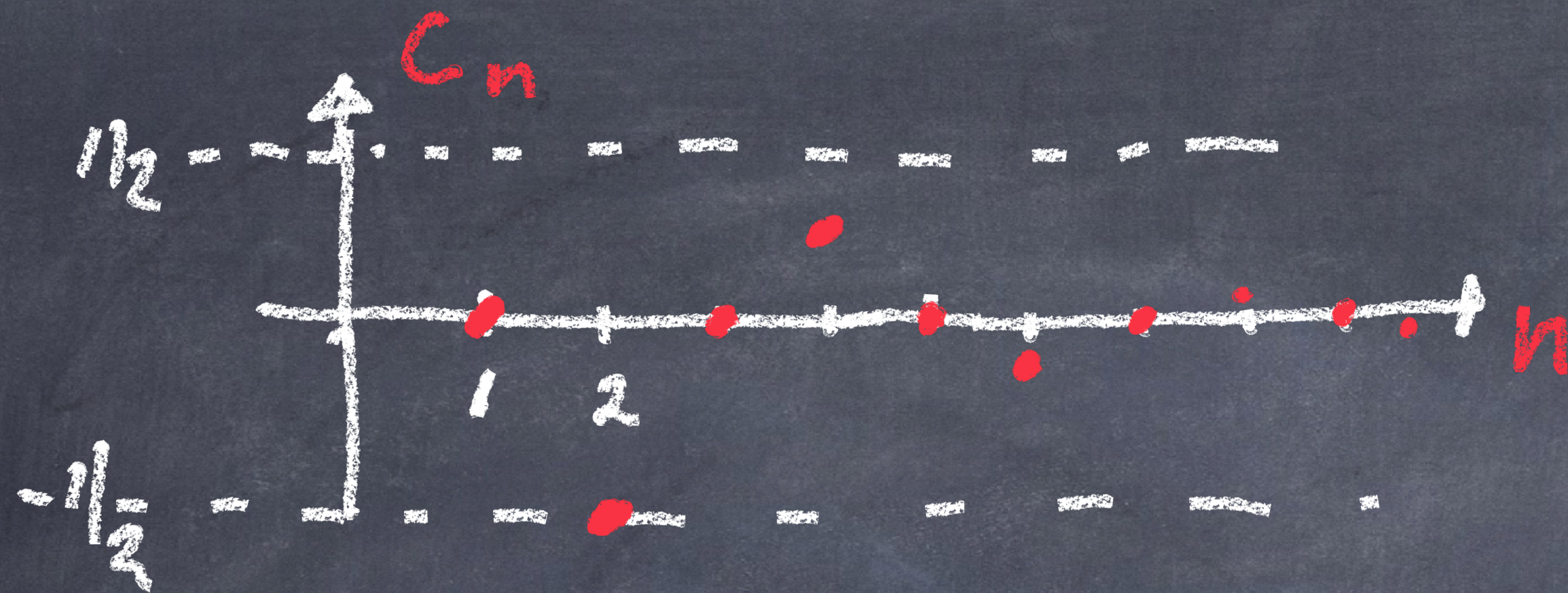
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$



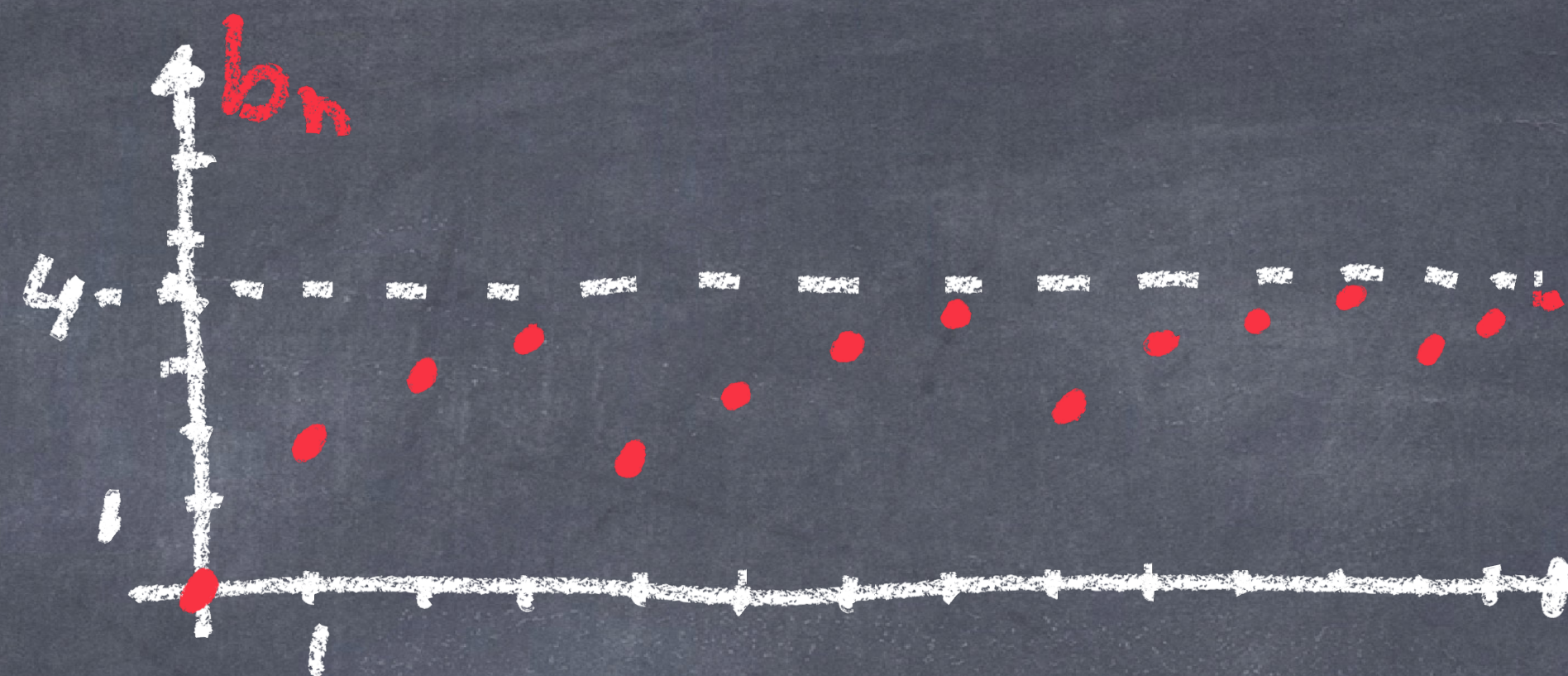
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

- ~~" $a_n$  kommer närmare och närmare  $L$  ju större  $n$  blir"~~
- $a_n$  "närmar sig" andra tal också...
- inte monotont
- $a_n = L$  inte "förbjudet"





$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

" $a_n$  ligger godtyckligt nära  $L$   
 för alla  $a_n$  tillräckligt långt från  
 $\bar{L}$  tal följderna."



" $a_n$  ligger godtyckligt nära  $L$   
för alla  $a_n$  tillräckligt långt från  
 $\bar{\epsilon}$  tal följderna."

Översätts till

"Avståndet mellan  $a_n$  och  $L$ ,  
 $|a_n - L|$  kan fås godtyckligt litet

för alla tillräckligt stora  $n$ "



"Avståndet mellan  $a_n$  och  $L$ ,  
 $|a_n - L|$  kan fås godtyckligt litet

mindre än varje givet  $\varepsilon > 0$

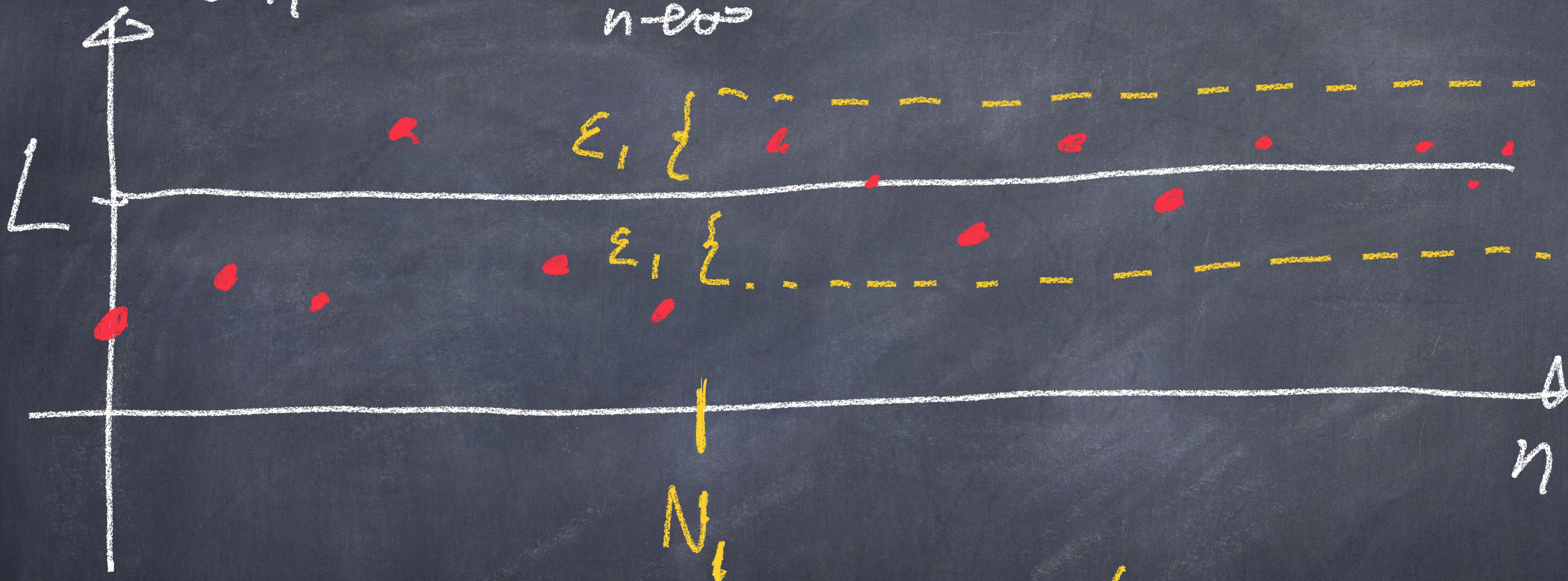
för alla tillräckligt stora  $n$ "

för alla  $n \geq$  något  $N = N(\varepsilon)$



$a_n$ 

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

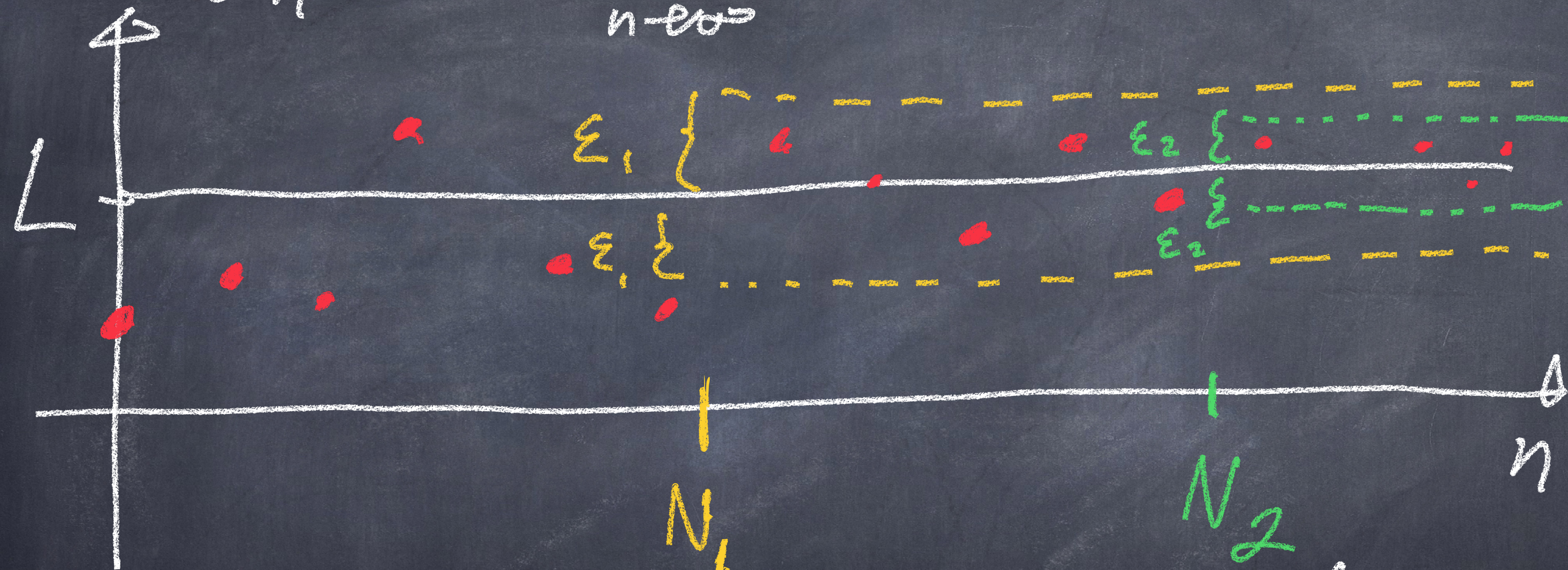


Given  $\epsilon, > 0$  find  $N, \text{ s.t.}$

$$n \geq N \Rightarrow |L - a_n| < \epsilon$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$



Given

$\epsilon_2$

$$0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$$

finds

$$N_2 \geq N_1$$

s.t.

$$n \geq N_2 \Rightarrow$$

$$|a_n - L| < \epsilon_2$$



# DEFINITION:

Talföljden  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  har  
gränsvärdet  $L$  när  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Om det till varje  $\varepsilon > 0$

fanns ett  $N = N(\varepsilon)$  sådant att

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$



Example:- Let  $a_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n}$ ,

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, -1/2, 0, 1/4, \dots\}$$

Visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

---



Vi vill hitta ett tal  $N = N(\varepsilon)$  sådant  
att om vi sedan väljer  $n \geq N$ , så  
är vi säkra på att

$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$



Vi vill hitta ett tal  $N = N(\varepsilon)$  sådant  
att om vi sedan väljer  $n \geq N$ , så  
är vi säkra på att

$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

---

Vi studerar  $|a_n - 0|$ :

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$



$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

så om vi väljer  $n$  så att  $\frac{1}{n} < \varepsilon$   
 är även  $|a_n - L| < \varepsilon$ .



$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

så om väljer  $n$  så att  $\frac{1}{n} < \varepsilon$   
 är även  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

Men  $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ .



$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

så om väljer  $n$  så att  $\frac{1}{n} < \varepsilon$   
 är även  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

$$\text{Men } \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Givet ett  $\varepsilon > 0$  väljer vi därför  
 $N(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$  = "minsta heltal  $\geq 1/\varepsilon$ ".



$$|a_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

så om väljer  $n$  så att  $\frac{1}{n} < \varepsilon$   
 är även  $|a_n - L| < \varepsilon$ .

$$\text{Men } \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Givet ett  $\varepsilon > 0$  väljer vi därför

$$N(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil = \text{"minsta heltal } \geq 1/\varepsilon \text{"}$$

$$n > \lceil 1/\varepsilon \rceil \implies n > 1/\varepsilon \implies \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$



T.ex.

$\ddot{a}_v$

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \right| < \frac{1}{100}$$

om  $n \geq 100$

$$< \frac{1}{1000}$$

om  $n \geq 1000$

$$< \varepsilon$$

om  $n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$



Exempel: Visa att  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/3^n) = 1$ .

$\forall$  måste visa att för varje

litet tal  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N(\varepsilon)$  s.d.

$| (1 - \frac{1}{3^n}) - 1 | < \varepsilon$  för alla  $n \geq N(\varepsilon)$ .



Finn  
 $N(\varepsilon)$  s.d.  $\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$  för alla  $n \geq N(\varepsilon)$ .



Find  $n$  s.t.  $\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ .

$$\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{3^n} \right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon \quad \underline{0 \text{ u. } 1}$$

$$3^n > 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \log_3 3^n > \log_3 1/\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \log_3 1/\varepsilon.$$



Finn  $N(\varepsilon)$  s.d.  $\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$  för alla  $n \geq N(\varepsilon)$ .

$$\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{3^n} \right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon \quad \text{om}$$

$$3^n > 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 3^n > \log_3 1/\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \log_3 1/\varepsilon.$$

Givet  $\varepsilon > 0$ , tag ett heltal  $N(\varepsilon)$   
 $N(\varepsilon) \geq \log_3 1/\varepsilon$ . Då gäller att

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow n > \log_3 1/3 \xRightarrow[\text{ovan}]{\text{enl}} \left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$$



# Serier - ett par exempel

Låt  $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$



$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

n-te Partial Summen till S.



$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

n-te Partial Summe till S.

$$S_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{geometrisk} \\ \text{summa} \end{array} \right\} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left( 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$



$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

enl  $\frac{3}{2}$   
 föregående 4:6

serie  $S$  sägs vara  
konvergent med  
 summa  $S = \frac{3}{2}$ .



Ex:  $S = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k = (1 + 3 + 9 + \dots)$

är divergent

Ex  $S_n = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{geometrisk} \\ k=0 \text{ till } 3 \end{array} \right\}$   
 $= \frac{1}{1} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} (3^n - 1)$  och talföljden

$\{S_n\} = \left\{ \frac{1}{2} (3^n - 1) \right\}_{n=1}^{\infty}$  är divergent



Visa alle

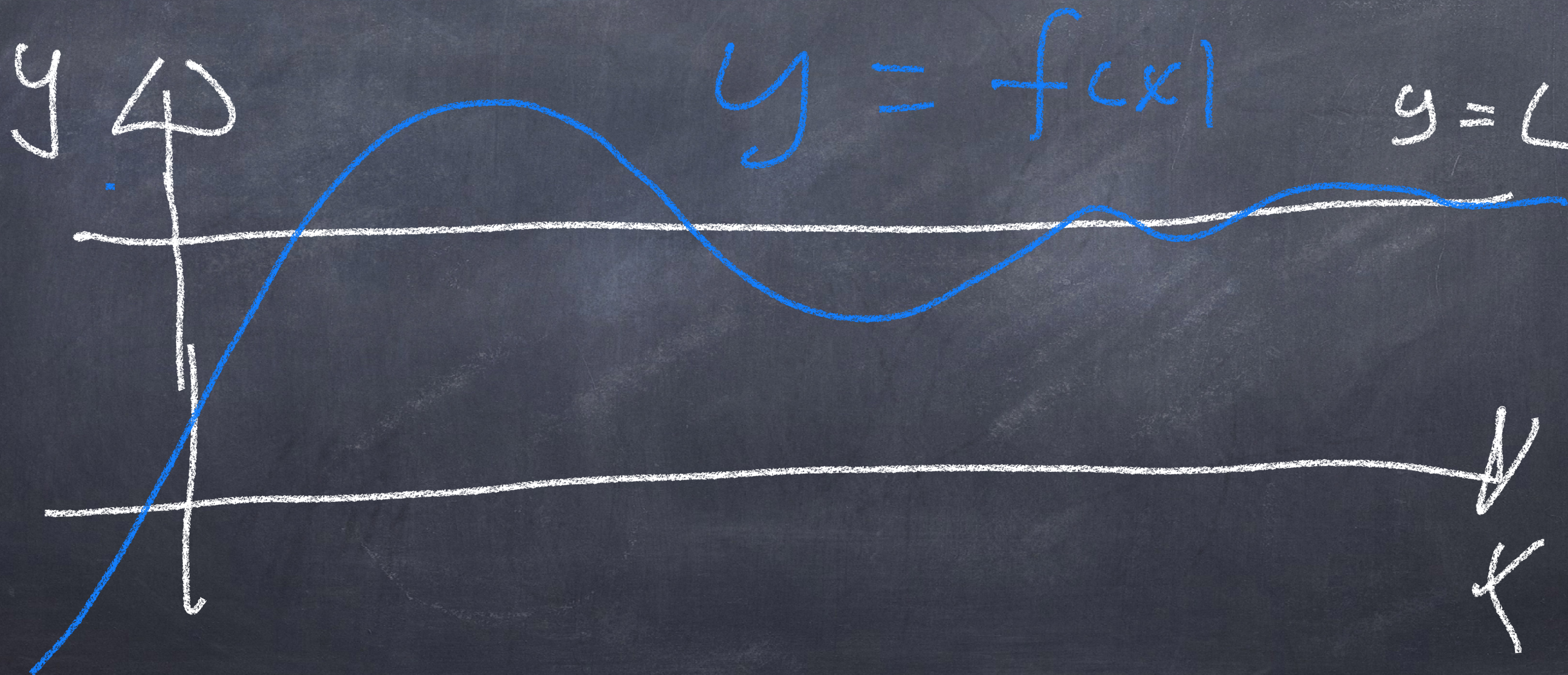
$$\cdot 0.333\dots = 0.\overline{3} = \frac{1}{3}$$

$$\cdot 0.999\dots = 0.\overline{9} = 1$$



gränsvärden lim  $f(x)$   
 $x \rightarrow \infty$

---





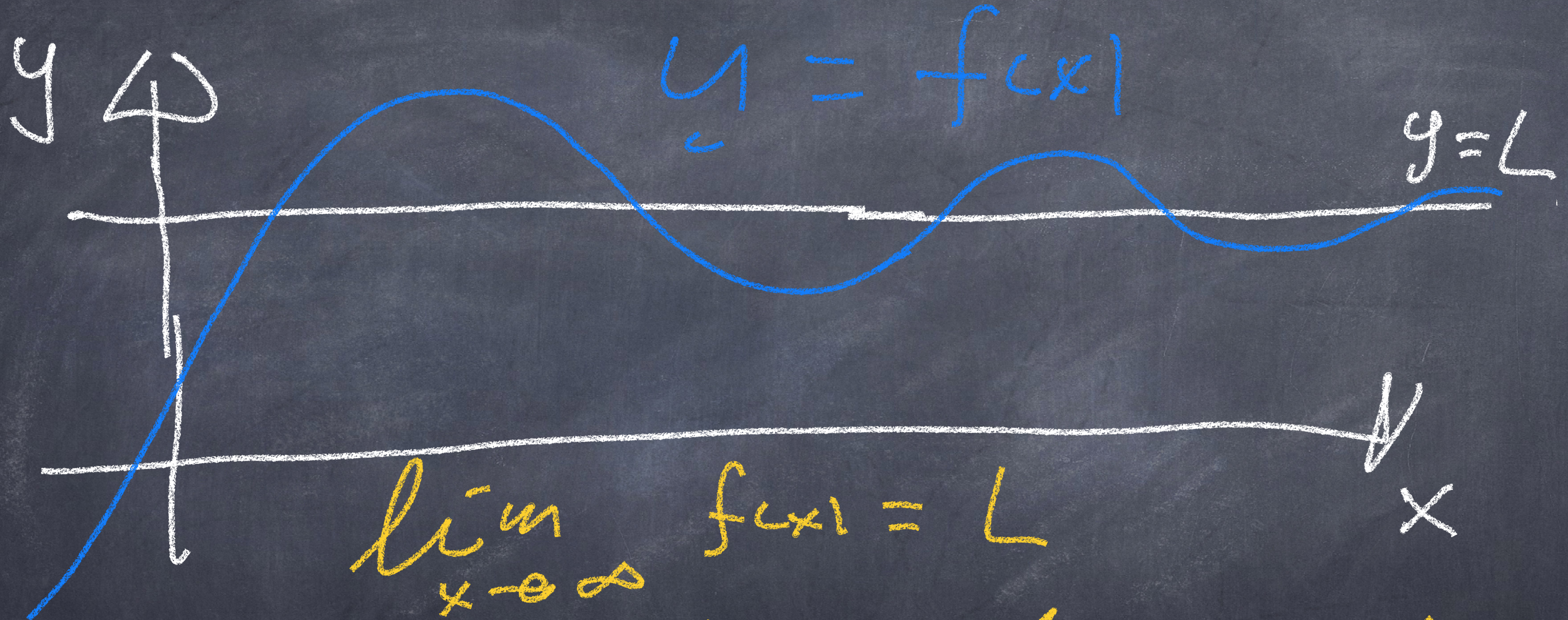
Def.  $f(x)$  har gränsvärde  $L$   
när  $x \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ,

om det finns värde  $\varepsilon > 0$

finns  $R = R(\varepsilon)$  s.g.

$$x \geq R(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$





$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$\Rightarrow y = L$  är horisontell asymptot

Exempel  $y = f(x)$  när  $x \rightarrow \infty$



Ex: Vi visar lim  $\frac{1}{x^3} = 0$   
 $x \rightarrow \infty$



$\forall \epsilon > 0. \exists R$  mit Hilfe  $R = R(\epsilon)$  s.a.

$$x > R(\epsilon) \Rightarrow |1/x^3 - 0| < \epsilon.$$



Let  $\varepsilon > 0$ .  $\forall \varepsilon$  will find  $R = R(\varepsilon)$  s.t.

$$x > R(\varepsilon) \Rightarrow |1/x^3 - 0| < \varepsilon.$$

$$|1/x^3 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < \varepsilon \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{\varepsilon}$$



Lösung  $\varepsilon > 0$ .  $\forall i$  will hätte  $R = R(\varepsilon)$  s.a.

$$x > R(\varepsilon) \Rightarrow |1/x^3 - 0| < \varepsilon.$$

$$|1/x^3 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < \varepsilon \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{1/\varepsilon} \quad \text{Also kann ich}$$

$$\text{wählen } R(\varepsilon) = \sqrt[3]{1/\varepsilon}.$$

$$y = 1/x^3$$

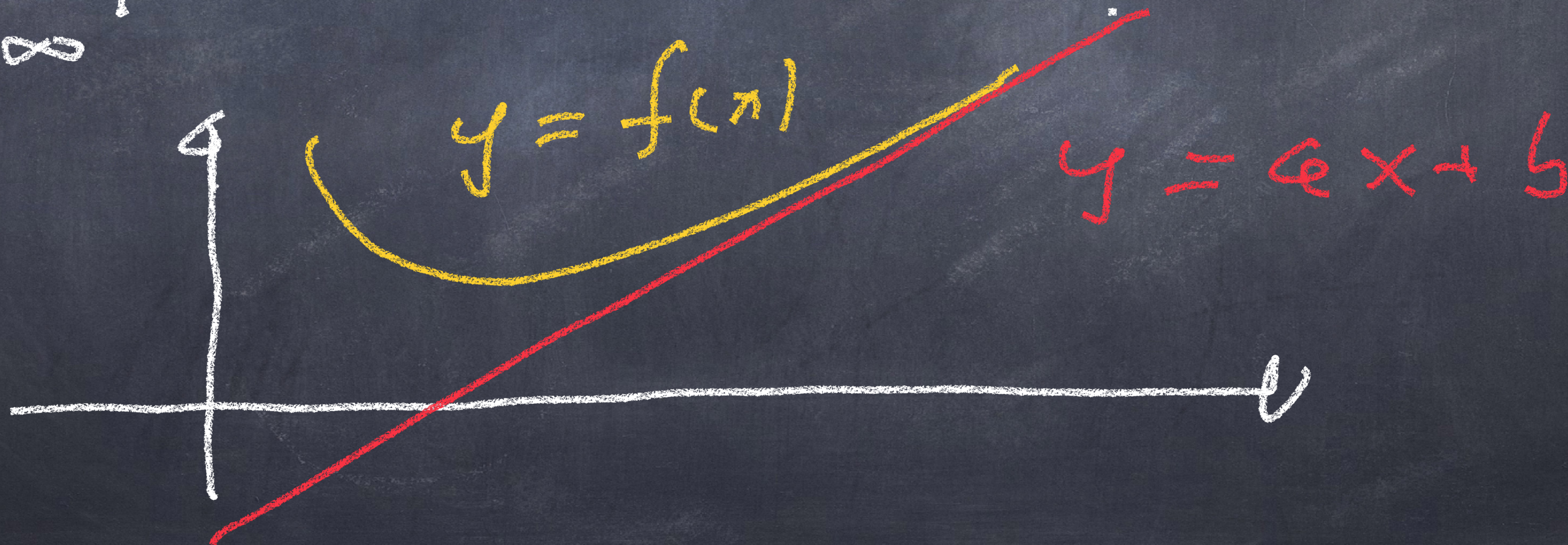




Def:  $y = f(x)$  has an  
asymptote  $\Leftrightarrow \quad y = ax + b$

da  $x \rightarrow \infty$  om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$





Exempel:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

polynomial division



Exempel:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

polynomial division

"as"  $y = 2x - 3$  should asymptote

still  $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1}, \quad x \rightarrow \infty.$

by

$$|f(x) - (2x - 3)| = \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$



Gränsvärden  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

---

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

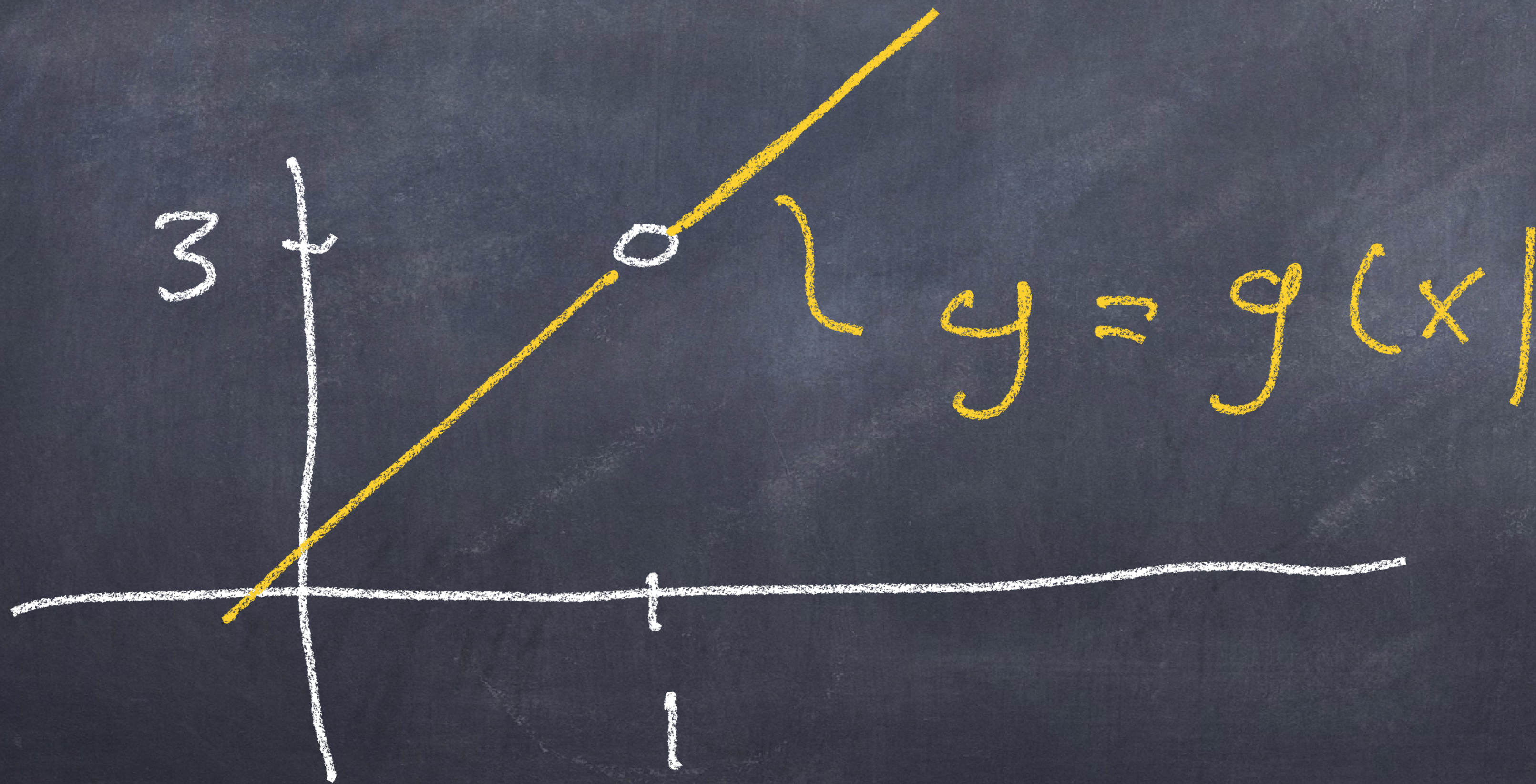


$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$





$$\bullet \quad g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} \stackrel{\text{d.c.}}{=} (2x + 1) \quad x \neq 1$$





Def:  $f(x)$  har gränsvärdet  $L$

då  $x \rightarrow a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$x \rightarrow a$

om det till varje  $\varepsilon > 0$

finns ett  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sådant att

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$



Ex:  $\angle 0 \angle g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$  . Visa  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$

---



Ex: Låt  $g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ . Visa  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

---

Låt  $\varepsilon > 0$ . Vi ska finna  $\delta = \delta(\varepsilon)$   
sådant att  
 $|g(x) - 3| < \varepsilon$  för alla  $x$  så  $0 < |x - 1| < \delta$

---



Ex: Låt  $g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ . Visa lim  $g(x) = 3$   
 $x \rightarrow 1$

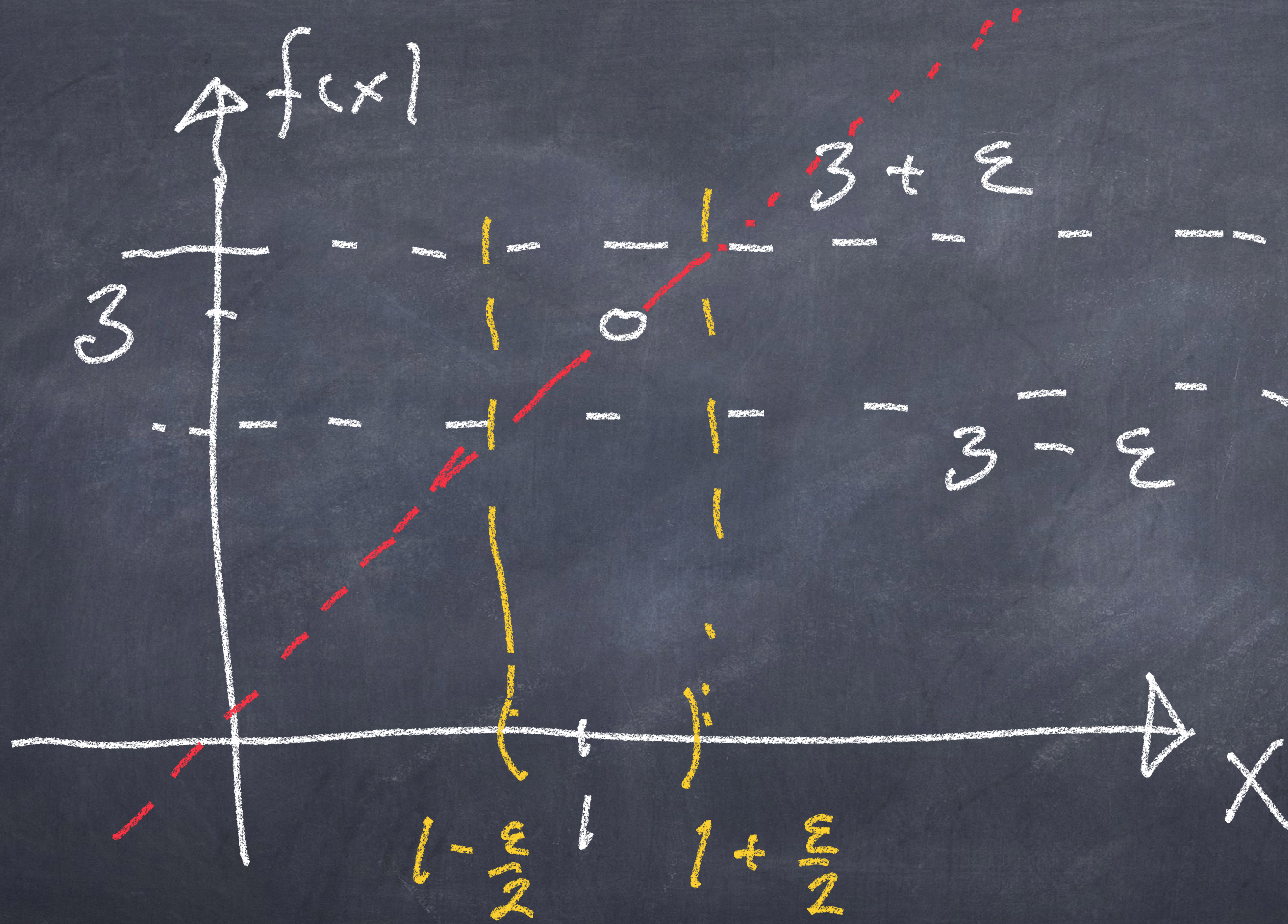
---

Låt  $\varepsilon > 0$ . Vi ska finna  $\delta = \delta(\varepsilon)$   
sådant att  
 $|g(x) - 3| < \varepsilon$  för alla  $x$  så  $0 < |x - 1| < \delta$

---

$$\begin{aligned} |g(x) - 3| &= \left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| = |(2x + 1) - 3| \\ &= |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \quad \text{om } |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$







Ex: Derivatus definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

or  $x = x_0 + h$



Visa att om  $g(x) = x^2$  så är

$$g'(3) = 6$$

---

$$g'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6 \quad \text{Lsg}$$

gegeben  $\varepsilon > 0$ , Lsg  $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ .  
 Das gilt auch

$$0 < |h-0| = |h| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|(6+h) - 6| = |h| < \varepsilon$$

