Föreläsning 13

SF1661 HT 21

7/10

- Exponentialfunktioner
- Logaritmer
- Potensfunktioner

(I) "Fakta", räkneregler, samband, ekvationer m.m.

(II) Hur hänger det ihop?
Definitioner & teori

a^b exponent

bas

Vad menas med

t.ex $3^{\sqrt{2}}$?

...

a^b ← exponent

a ← bas

Vad menas med t.ex $3^{\sqrt{2}}$?

Exponentialfnk.

$f(x) = a^x$,

$f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$\overset{\shortparallel}{V_f}$

a konstant

$a > 0, a \neq 1$

a^b ← exponent

a ← bas

Vad menas med t.ex $3^{\sqrt{2}}$?

Exponentialfnk.

$f(x) = a^x$,

$f : \mathbb{R} \to \underbrace{(0,\infty)}_{= V_f}$

a konstant

$a > 0$, $a \neq 1$

Logaritm fnk.

$l(x) = \log_a x$

$l : (0,\infty) \to \underbrace{\mathbb{R}}_{= V_l}$

a konstant

$a > 0$ $a \neq 1$

a^b

exponent

bas

Vad menas med t.ex $3^{\sqrt{2}}$?

Exponentialfunk.	Logaritmfunk.	Potensfunk.
$f(x) = a^x$,	$l(x) = \log_a x$	$p(x) = x^b$
$f: \mathbb{R} \to \underbrace{(0,\infty)}_{V_f}$	$l: (0,\infty) \to \underbrace{\mathbb{R}}_{V_l}$	t.ex
a konstant	a konstant	$g(x) = x^{1/3}$
$a > 0$, $a \neq 1$	$a > 0$ $a \neq 1$	$h(x) = x^3$
		$k(x) = x^{-3}$
		....

Exempel exponentiell funktioner

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = 10^x$$

Exponentialfunktioner

$f(x) = a^x \ , \ f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \quad a > 0, a \neq 1$

Exponentialfunktioner

$f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, $a > 0, a \neq 1$

- f är strängt monotona $\left(\begin{matrix}\text{avtagande/} \\ \text{växande}\end{matrix}\right)$

$\Longrightarrow f$ injektiv

Exponentialfunktioner

$f(x) = a^x$, $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $a > 0, a \neq 1$

- f är strängt monotona (avtagande / växande)

  $\Longrightarrow$ f injektiv

- $V_f = (0,\infty)$, f surjektiv

Exponentialfunktioner

$f(x)=a^x$, $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $a>0,\ a\neq 1$

- f är strängt monotona (avtagande / växande) $\Longrightarrow$ f injektiv
- $V_f=(0,\infty)$, f surjektiv
- f är bijektiv, har invers $f^{-1}(x)=\log_a x$

Om $a\neq 1$

$L(x) = \log_a(x)$, $L : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a > 1$ $(0 < a < 1)$

är alltså invers till

$E(x) = a^x$, $E : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$

Ex: $\ln(x) = \log_e x$

är invers till $f(x) = e^x$.

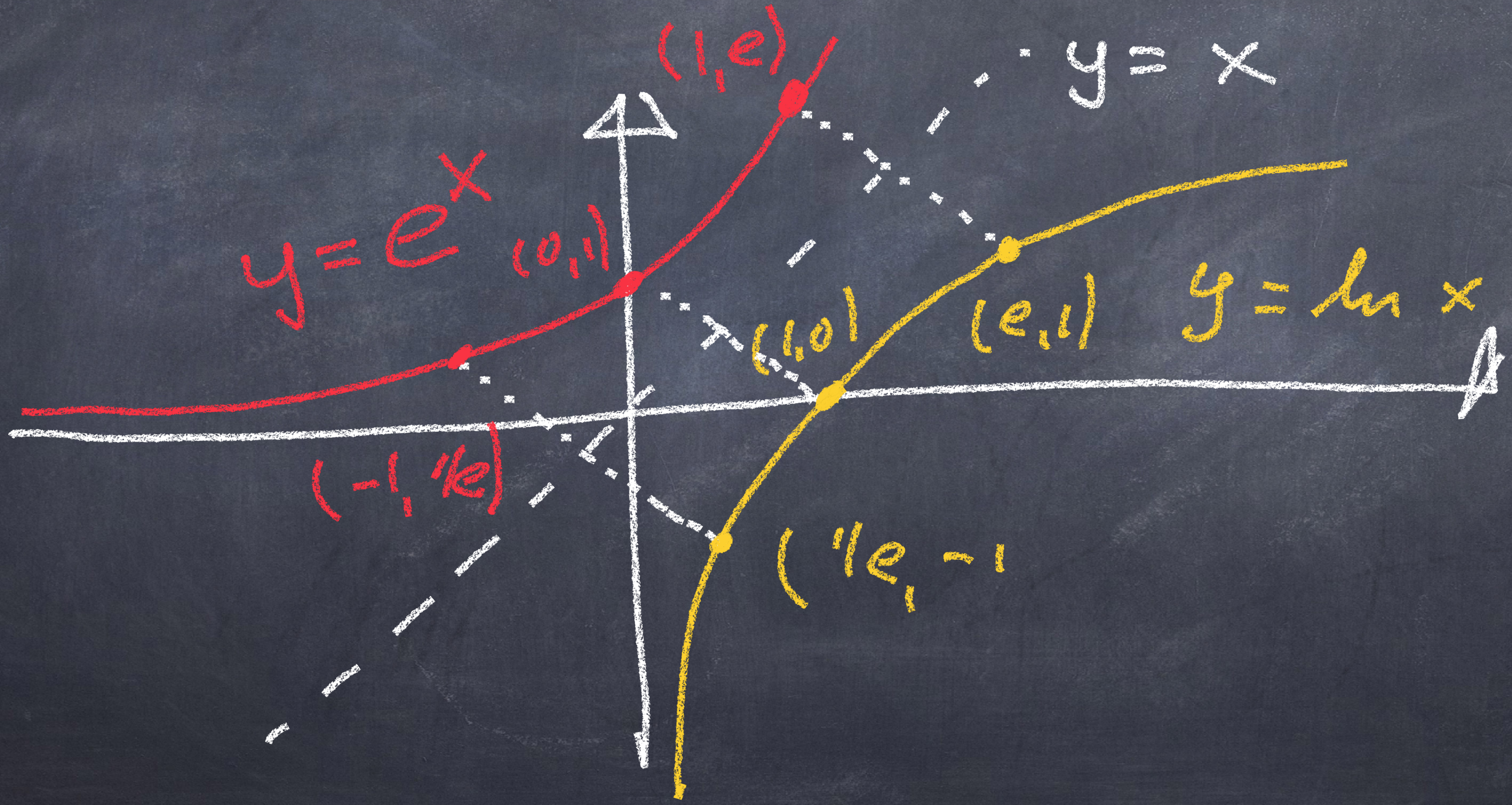
$f(\ln(x)) = \boxed{e^{\ln x} = x}$, $\forall\ x \in (0, \infty)$

$\ln(f(x)) = \boxed{\ln e^x = x}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

Allmänt: $\boxed{a^{\log_a x} = x}$, $\forall\ x \in (0, \infty)$

$\boxed{\log_a a^x = x}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

graferna $y = a^x$ och $y = \log_a x$ är alltså varandras spegelbilder i linjen $y = x$



Ex: • $lg(x)$ är invers till 10^x.

• $u = 10^v \iff v = \lg u$

• $\lg u$ = "det tal 10 ska upphöjes till för att ge u"

dvs $10^{\lg u} = u$, och $\lg 10^v = v$

Ex: $u = e^v \iff v = \ln u$

Allmänt: $u = a^v \iff v = \log_a u$

- Bestäm

$\lg(100) = 2$ $\quad$ $\lg(1000) = 3$ $\quad$ $\lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2$

$(10^2 = 100)$ $\quad$ $(10^3 = 1000)$ $\quad$ $\left(10^{-2} = \frac{1}{100}\right)$

- Ange storleksordning på

lg 2 $\quad$ lg 20 $\quad$ lg 300

Ange:

$\log_4 16 = 2$ (ty $4^2 = 16$)

$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ (ty $e^{1/2} = \sqrt{e}$)

$\ln \frac{1}{e} = -1$ (ty $e^{-1} = 1/e$)

$\log_{27} 9 = 2/3$ (ty $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

$\log_{27} 1/9 = -2/3$ (ty $27^{-2/3} = \frac{1}{27^{2/3}} = \frac{1}{9}$)

Potenslagar

(för potens & exponentiell funkt.)

(P1) $r^u r^v = r^{u+v}$

(P2) $(r^u)^v = r^{uv}$

(P3) $\frac{r^u}{r^v} = r^{u-v}$

(P4) $(rs)^u = r^u s^u$

$r, s \in (0,\infty)$, $u, v \in \mathbb{R}$

(och spec. fall t.ex $u, v \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{R}$)

Logaritmlagar

(L1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(L2) $\log_a x^y = y \log_a x$

(L3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$a > 0$, $a \neq 1$

$x, y \in (0, \infty)$

Exempel log-lagar: Stöd för minnet

(L1): $\lg 10^2 \cdot 10^3 = \underbrace{\lg 10^2}_{2} + \underbrace{\lg 10^3}_{3}$

enl (P1) $\underbrace{\lg 10^2 \cdot 10^3}_{\lg 10^5 = 5}$

(L3): $\lg \frac{10^5}{10^3} = \underbrace{\lg 10^5}_{5} - \underbrace{\lg 10^3}_{3}$

enl (P3) $\underbrace{\lg \frac{10^5}{10^3}}_{\lg 10^2 = 2}$

$$(L2) \quad \log_a(x^y) = y \log_a x$$

följer av $(L1)$ om $y \in \mathbb{N}$

$$\log_a x^n = \log_a(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ st}})$$

upprepad användning av $(L1)$ $=$

$$\underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ st.}} = n \log_a x$$

Utgå från (P1), bevisa (L1).

(L1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Utgå från (P1), bevisa (L1).

(L1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Vi visar att $a^{V.L.} = a^{H.L.}$. Eftersom a^x är en injektiv funktion medför det att V.L. = H.L.

Utgå från (P1), bevisa (L1).

(L1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Vi visar att $a^{V.L.} = a^{H.L.}$. Eftersom a^x är en injektiv funktion medför det att V.L. = H.L.

$$a^{V.L.} = a^{\log_a xy} = xy$$

$$a^{H.L.} = a^{\log_a x + \log_a y} \underset{(P1)}{=} a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$$

V.S.B.

Utgå från (L1) och bevisa (P1)

(P1) $r^u r^v = r^{u+v}$, $r > 0$, $r \neq 1$

Utgå från (L1) och bevisa (P1)

(P1) $r^u r^v = r^{u+v}$, $r > 0$, $r \neq 1$

Vi visar $\log_r$ V.L. $= \log_r$ H.L. . Eftersom $\log_r x$ är en injektiv funktion följer det då att V.L. = H.L. .

Utgå från (L1) och bevisa (P1)

(P1) $r^u r^v = r^{u+v}$, $r > 0$, $r \neq 1$

Vi visar $\log_r$ V.L. $= \log_r$ H.L. . Eftersom $\log_r x$ är en injektiv funktion följer det då att V.L. = H.L. .

$$\log_r \text{V.L.} = \log_r(r^u \cdot r^v) \underset{(L1)}{=} \log_r(r^u) + \log_r(r^v) = (u+v)$$

$$\log_r \text{H.L.} = \log_r r^{(u+v)} = (u+v).$$

Q.E.D

Beräkna

$$\lg 27^{1/3} + \frac{\lg 3}{2} + \lg 1/9 =$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2}\lg 3 + \lg 3^{-2} =$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2}\lg 3 - 2\lg 3 =$$

$$= \underline{-\frac{1}{2}\lg 3} = \underline{\lg 3^{-1/2}} = \underline{\lg \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Beräkna

(Alternativ lösning)

$$\lg 27^{1/3} + \frac{\lg 3}{2} + \lg 1/9$$

$$= \lg 27^{1/3} + \lg 3^{1/2} + \lg 1/9$$

$$= \lg\left(27^{1/3} \cdot 3^{1/2} \cdot 1/9\right)$$

$$= \lg\left(3 \cdot 3^{1/2} \cdot 3^{-2}\right) = \lg 3^{1 + 1/2 - 2}$$

$$= \lg 3^{-1/2} = \lg \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ex: Lös ut $y = y(x)$ ur

$$\ln y^2 = x + 3$$

<u>Ex:</u> Lös ut $y = y(x)$ ur

$$\ln y^2 = x + 3$$

$$e^{\ln y^2} = e^{x+3}$$

$$y^2 = e^{x+3}$$

$$y = \pm\sqrt{e^{x+3}} = \pm\sqrt{e^3}\sqrt{e^x} = \pm e^{3/2} \cdot e^{x/2}$$

Ex: Lös ut $y = y(x)$ ur

$$\ln y^2 = x + 3$$

$$e^{\ln y^2} = e^{x+3}$$

$$y^2 = e^{x+3}$$

$$y = \pm\sqrt{e^{x+3}} = \pm\sqrt{e^3}\sqrt{e^x} = \pm e^{3/2} \cdot e^{x/2}$$

VANLIGT FEL:

$$\ln y^2 = x + 3$$

$$e^{\ln y^2} = e^x + e^3$$

$$y^2 = e^x + e^3$$

Ex: Lös ekvationen

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

Ex: Lös ekvationen

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

Ekv endast def för $x > 0$.

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x^2+4x) = \ln(2x+3)$$

(om $x>0$)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+4x = 2x+3$$

Ex: Lös ekvationen

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

Ekv endast def för $x > 0$.

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(x^2+4x) = \ln(2x+3)$$

(om $x>0$)

$$\Leftrightarrow \quad x^2+4x = 2x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x=-3} \vee x=1$$

förkastas

ty $x>0$

Svar: $x=1$

Exponentialfunktioner & logaritmer
– definitioner & begrepp

Hur definieras egentligen t.ex

$3^{2/7}$, $5^{\sqrt{2}}$, $\log_3 5$.

a^b "enkelt" att def. för

$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ och $b \in \mathbb{Q}$:

a^b "enkelt" att def. för

$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ och $b \in \mathbb{Q}$:

- för $b \in \mathbb{N}$ $\quad a^b \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ st.}}$

ger (P1)–(P3) för exponenter i $\mathbb{N}$

a^b "enkelt" att def. för
$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ och $b \in \mathbb{Q}$:

- för $b \in \mathbb{N}$ $\quad a^b \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ st.}}$

  ger (P1)–(P3) för exponenter i $\mathbb{N}$

- def $\quad a^0 \overset{*}{=} 1$ och $a^{-b} \overset{*}{=} \frac{1}{a^b}$, $b \in \mathbb{N}$

(*) enda möjlig def. om (P1–P3) ska gälla.

a^b "enkelt" att def. för
$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ och $b \in \mathbb{Q}$:

- för $b \in \mathbb{N}$ $\quad a^b \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ st.}}$

ger (P1)–(P3) för exponenter i $\mathbb{N}$

- def $\quad a^0 \overset{*}{=} 1$ och $a^{-b} \overset{*}{=} \dfrac{1}{a^b}$, $b \in \mathbb{N}$

- def $\quad a^{p/q} \overset{*}{=} \sqrt[q]{a^p}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$$a^{-p/q} \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

(*) enda möjlig def. om (P1–P3) ska gälla.

svårare att def a^b, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

och att def $\log_a x$

<u>Tre alternativa vägen</u> - <u>en orientering</u>

svårare att def a^b, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
och att def $\log_a x$

Tre alternativa vägen - en orientering

I Först a^x, $x \in \mathbb{R}$,
Sedan $\log_a x$ som invers

svårare att def a^b, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
och att def $\log_a x$

Tre alternativa vägen - en orientering

I Först a^x, $x \in \mathbb{R}$,
sedan $\log_a x$ som invers

II Först $\ln x = \int^x 1/t \, dt$
sen e^x som dess invers, sen a^x, sen $\log_a x$

svårare att def a^b, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
och att def $\log_a x$

Tre alternativa vägen - en orientering

(I) Först a^x, $x \in \mathbb{R}$,
sedan $\log_a x$ som invers

(II) Först $\ln x = \int^x 1/t \, dt$
sen e^x som dess invers, sen a^x, sen $\log_a x$

(III) Först $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
sedan $\ln x$ som dess invers, sen a^x, sen $\log_a x$ ...

A1b
I

- a^r är def för $r \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $(a \neq 1)$
- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kan approximeras med rationella tal,

$$\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\} \quad x = \lim_{k \to \infty} r_k$$

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} a^{r_k}$$

Ex: $3^{\sqrt{2}} = \lim_{k \to \infty} 3^{r_k}$

$r_1 = 1.4$
$r_2 = 1.41$
$r_3 = 1.414$ osv.

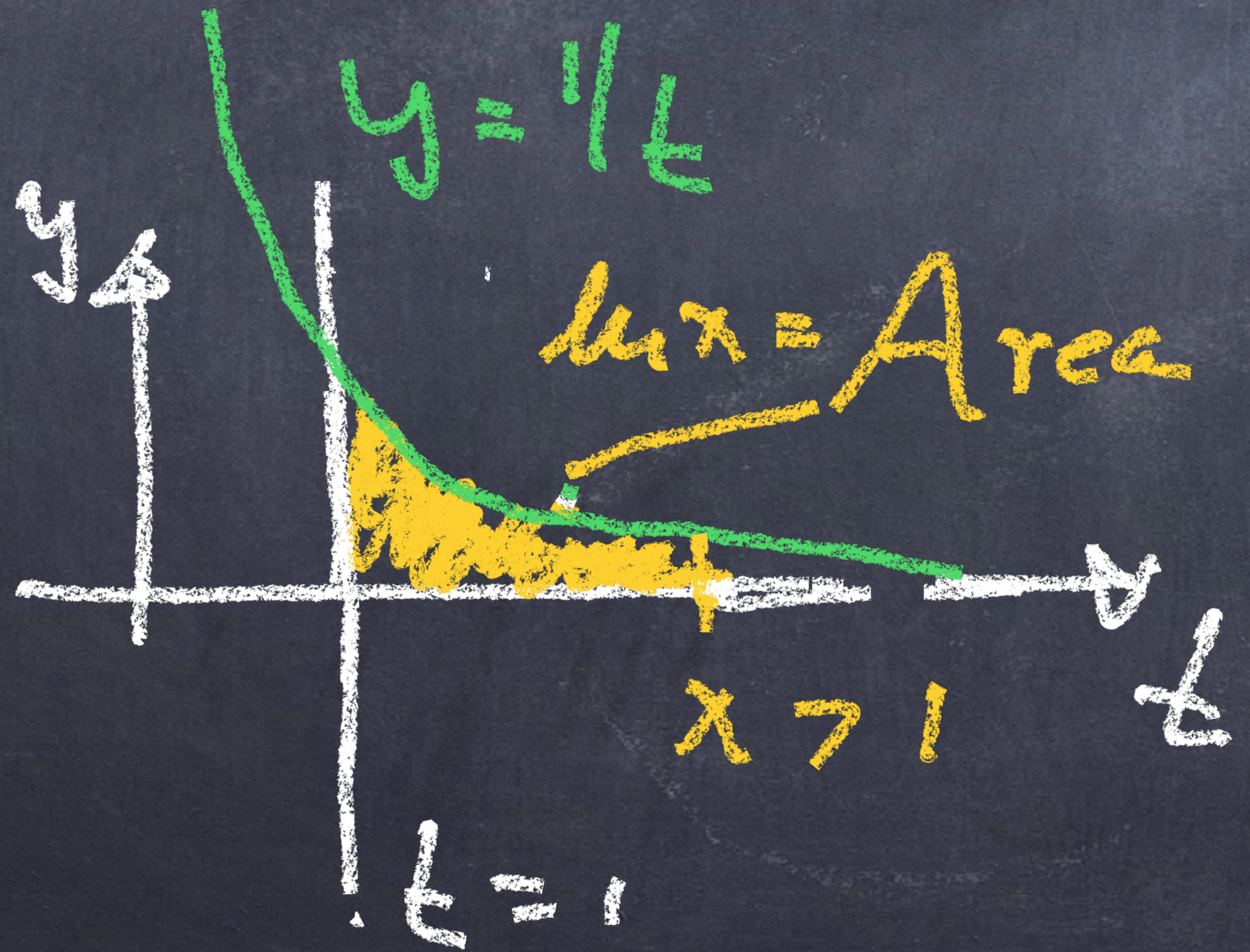
- Visa $f(x) = a^x$ uppfyller (P1)-(P4)
- Visa att $f(x) = a^x$ är inverterbar.
- Kalla inversen $\mathrm{Log}_a\, x$
- Visa att (L1)-(L3) m h a P1-P3 och att a^x och $\log_a x$ $\underbrace{\text{är inverser}}_{\text{varandras}}$.

Alt II

- a^r är def för $r \in \mathbb{Q}$, $a>0$ $(a \neq 1)$
- def sedan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x>0.$$

$x > 1$



$0 < x < 1$

- Visa att $\ln x$ uppfyller (L1-L3)
- Visa att $\ln x$ strängt växande
  $\Longrightarrow$ $\ln x$ inverterbar.
- Låt $\exp(x)$ vara invers
  och sätt $e \overset{\text{def}}{=} \exp(1)$ $(\Leftrightarrow \ln e = 1)$
- Visa att $\exp(r) = e^r$, $r \in \mathbb{Q}$
  och def. $e^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Visa att e^x uppfyller (P1-P3)

- När nu $\ln x$ och e^x är def. sätt
- $a^x \overset{(\text{def.})}{=} e^{x \ln a} = e^{\ln a^x}$

$\underbrace{a^x = e^{x \ln a} = e^{\ln a^x}}_{\text{användbar omskrivning!}}$

- visa a^x är inverterbar, $x \in \mathbb{R}$ och låt $\log_a x$ vara def. som dess invers

Alt III

Se kurs i Envariabel-analys

Börja med att definiera

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

för $x \in \mathbb{R}$

Måste definiera oändlig många termer!

- Visa e^x uppfyller (P1)-(P3) och är inverterbar osv.

Potensfunktioner

$$f(x) = x^r \quad , \; x > 0, \; r \in \mathbb{R}$$

[För vissa spec. funktioner kan def. mgd vara större

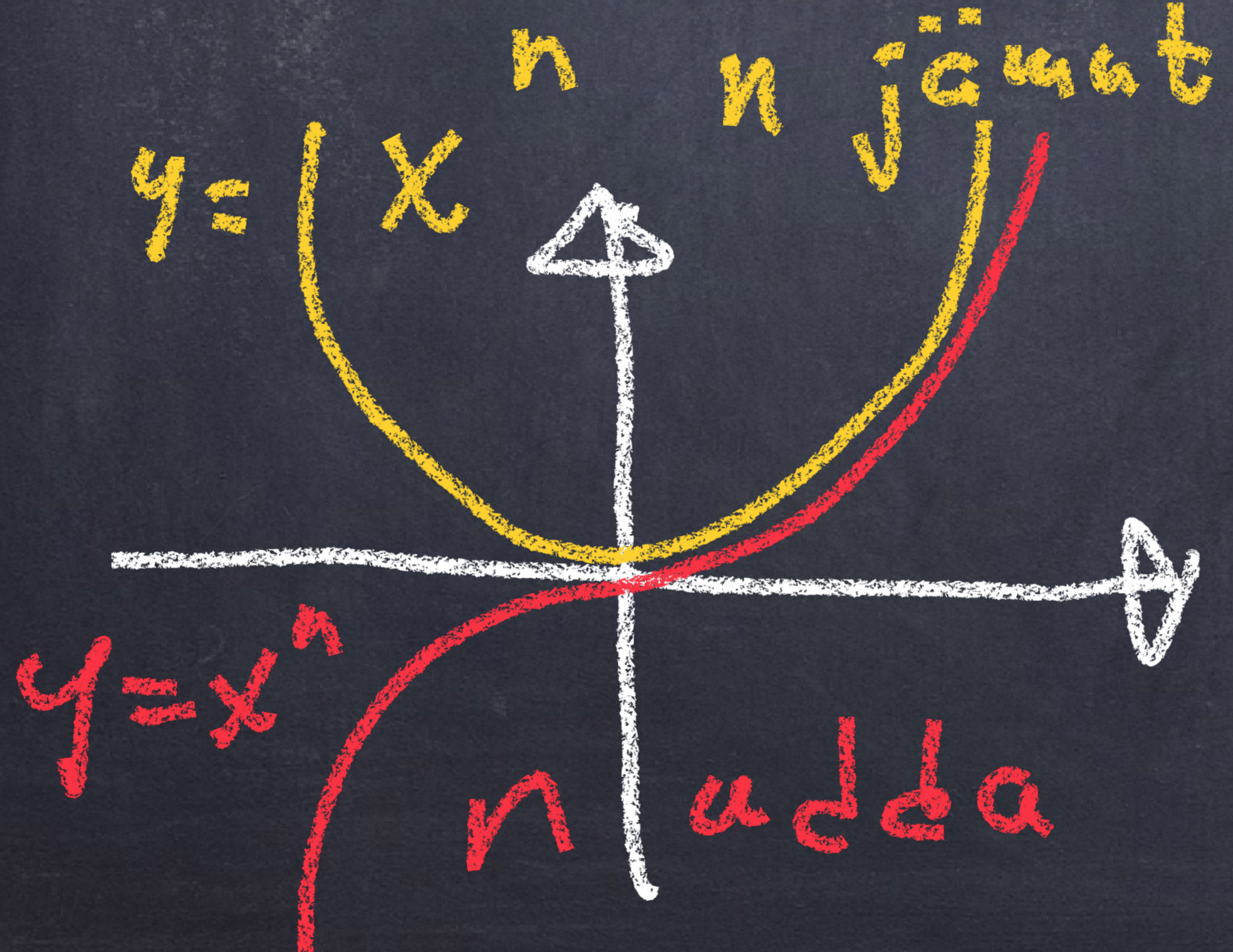
t.ex $f(x) = x^3$ def. $\forall x \in \mathbb{R}$]

$f(x) = x^n$

$n \in \mathbb{N}$

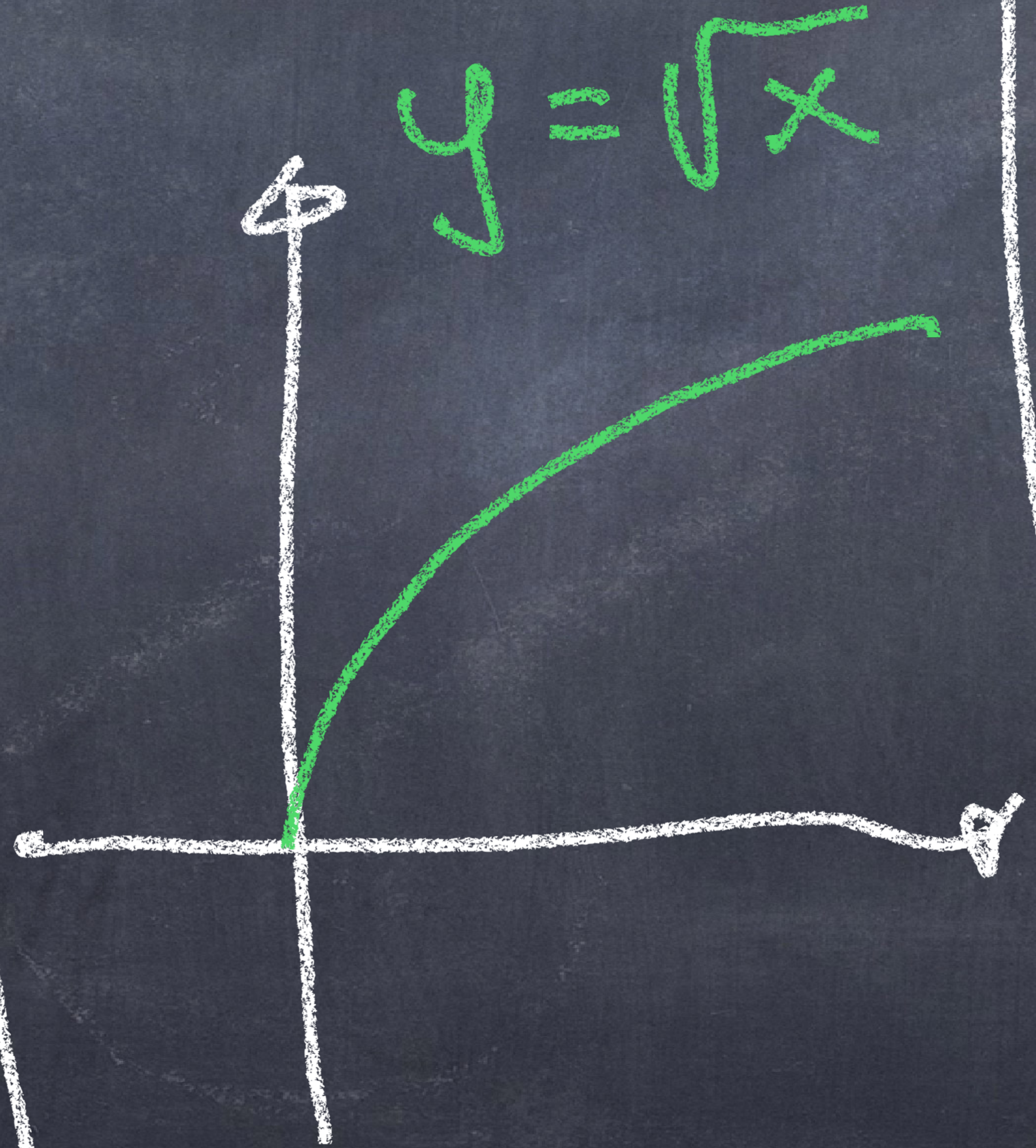
<u>monom</u>

(polynom med 1 term)

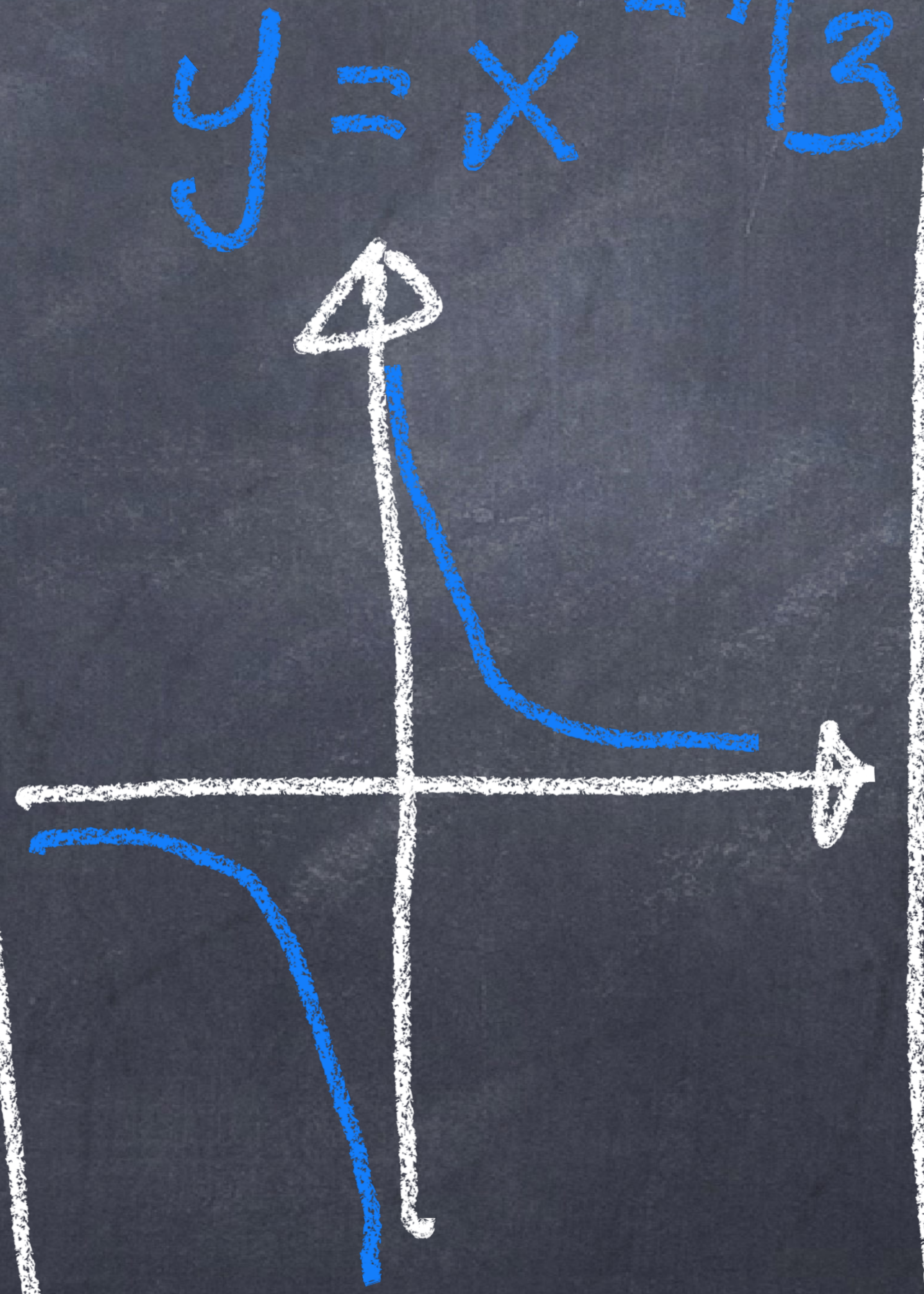


$$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$x \geq 0$



$$f(x) = x^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$



$$f(x) = x^{\pi} = e^{\pi \cdot \ln x}, \quad x \geq 0$$

$f(x) = x^r$, $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$

är inverterbar

och har invers $f^{-1}(x) = x^{1/r}$

visa detta!

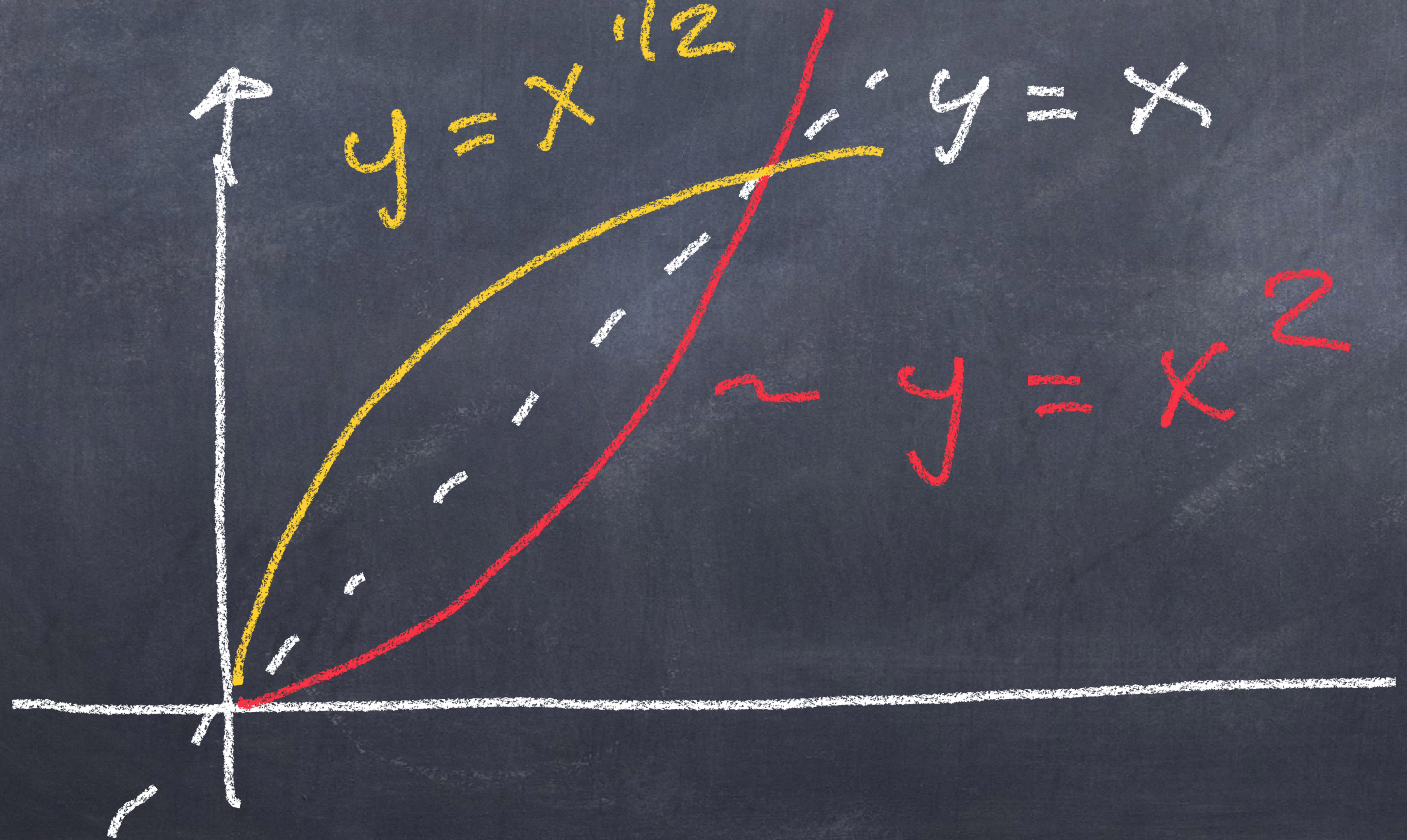
$$f(f^{-1}(x)) = f(x^{1/r}) = (x^{1/r})^r = x^{r \cdot 1/r} = x$$

P.s.s. $f^{-1}(f(x)) = \ldots = x$

Exempel

$$f(x) = x^{1/2}, \quad x \geq 0$$

$$f^{-1}(x) = x^{1/(1/2)} = x^2$$



Exempel: $g(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

är def för $x \neq 0$.

$$g^{-1}(x) = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$$

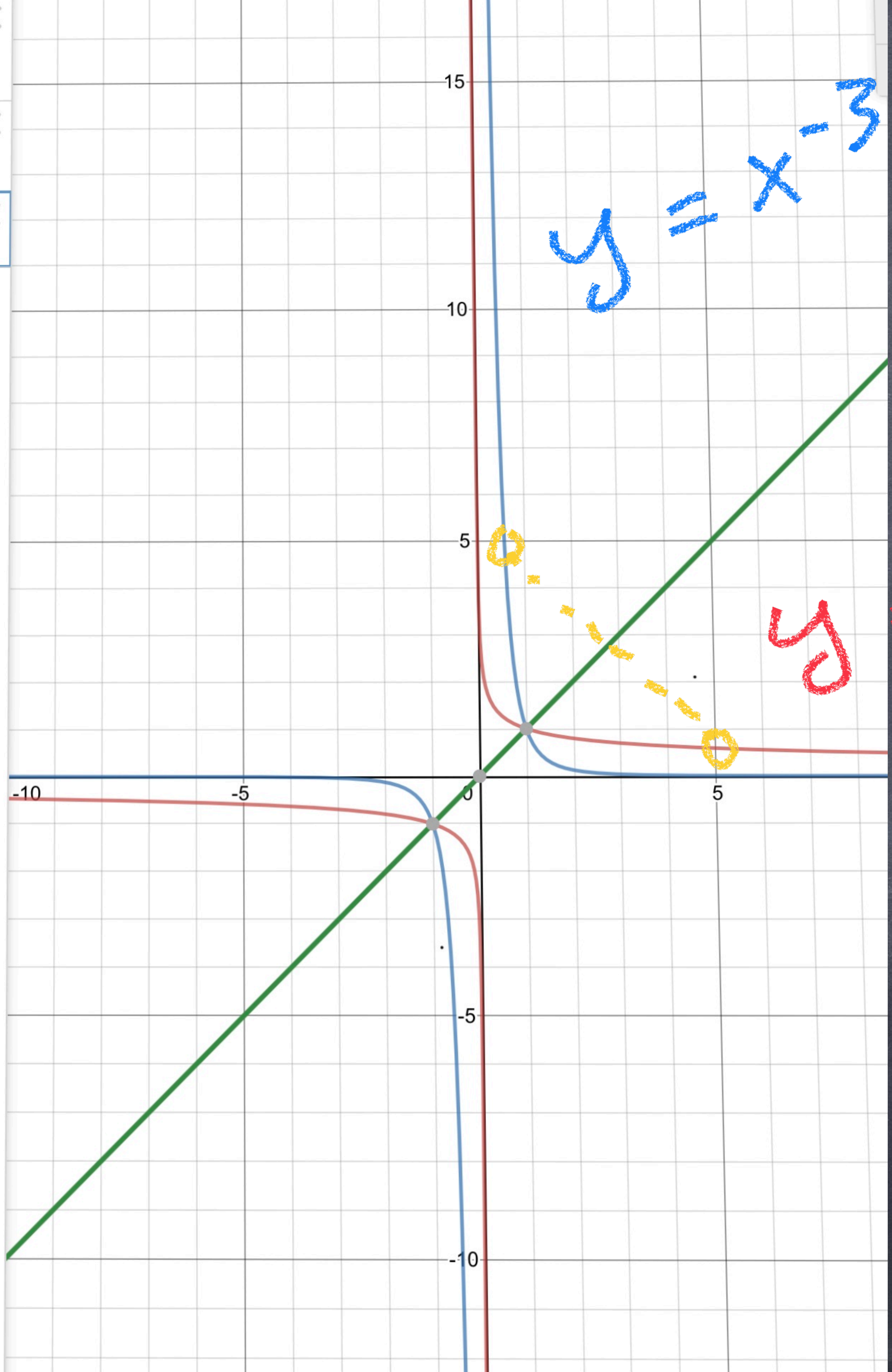
$$g(g^{-1}(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

$$g^{-1}(g(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}} = x$$

$x^{\left(\frac{-1}{(3)}\right)}$

$x^{(-3)}$

x



$y = x^{-3}$

$y = x$

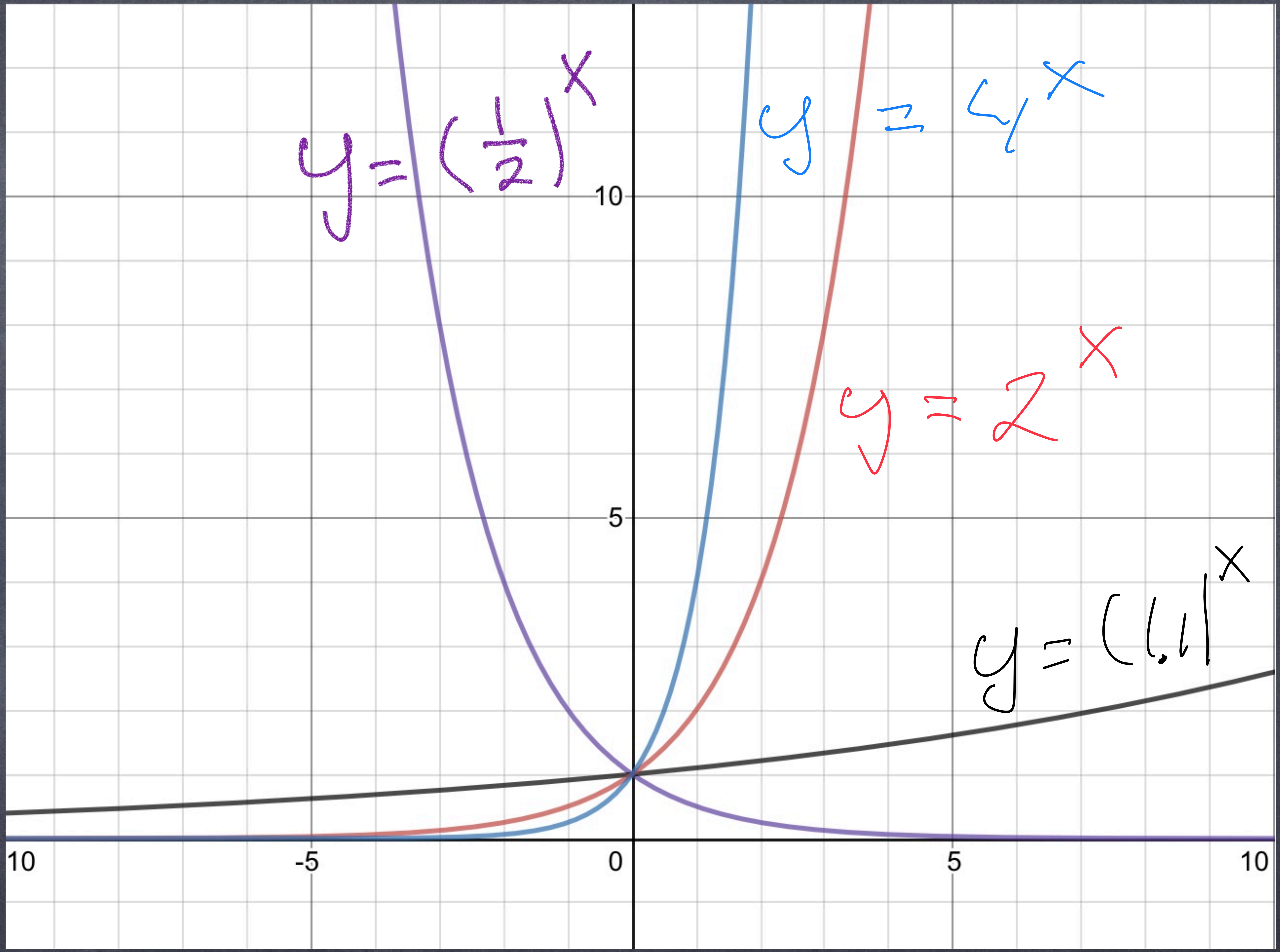
$y = x^{-1/3}$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = (1.1)^x$

$y = 2^x$

$y = 4^x$



$y = \lg x$

$y = \ln x$

$y = \log_{1/2} x$