

Seminarium 5

SF1661

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Uppgift 1

$$(a) \left(\frac{1}{2} - 2i \right) \left(3 - \frac{1}{3}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}i^2 + i \left(-\frac{1}{6} - 6i \right) =$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{37}{6}i$$

$$(b) \frac{\frac{1}{2} - 2i}{3 - \frac{1}{3}i} \cdot \frac{3 + \frac{1}{3}i}{3 + \frac{1}{3}i}$$

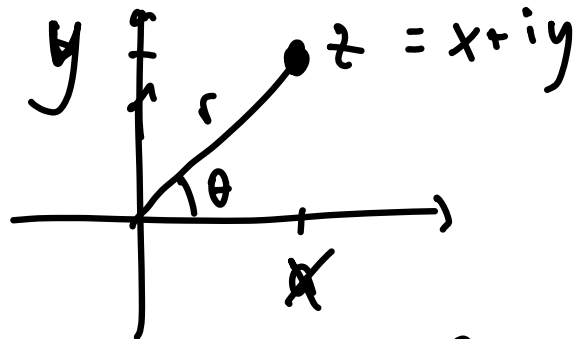
$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + i \left(-6 + \frac{1}{6} \right)}{9 + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{13}{6} - \frac{35}{6}i}{82/9} = \frac{39}{164} - \frac{105}{164}i$$

Svar: a) $\frac{5}{6} - \frac{37}{6}i$

b) $\frac{39}{164} - \frac{105}{164}i$

Uppgift 1

Uppgift 1



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{r (\cos \theta + i \sin \theta)}{1}$$

$$= \underline{r e^{i\theta}}$$

Polar form

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$w = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\underline{zw} = r_1 r_2 (\dots)$$

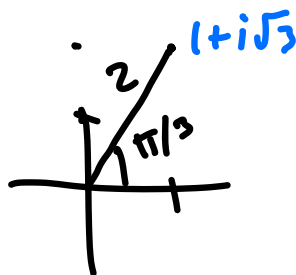
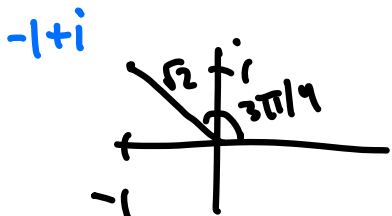
$$= \underline{\underline{r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))}}}$$

$$r \cos \theta = x$$

$$r \sin \theta = y$$

Uppgift 2

Beräkna $\frac{(-1+i)^{12}}{(1+i\sqrt{3})^7}$ $\approx \frac{(\sqrt{2} e^{i3\pi/4})^{12}}{(2 e^{i\pi/3})^7} = \frac{2^6 e^{i3\pi \cdot 12/4}}{2^7 e^{i7\pi/3}}$

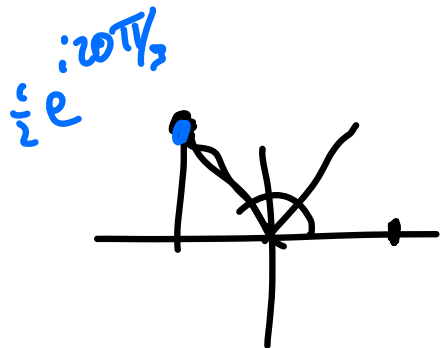


$$= \frac{1}{2} \frac{e^{i9\pi}}{e^{i7\pi/3}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i(9\pi - 7\pi/3)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i20\pi/3}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$



Uppgift 2

Uppgift 2

Uppgift 2

Uppgift 3

Beräkna $(1 - i)^5$

- (a) genom att använda binomialsatsen;
- (b) genom att använda de Moivres formel.

$$\begin{aligned} a) \quad (1 - i)^5 &= 1^5 + \binom{5}{1} 1^4 (-i) + \binom{5}{2} 1^3 (-i)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3} 1^2 (-i)^3 + \binom{5}{4} 1^1 (-i)^4 + (-i)^5 \\ &= \underline{1} - 5i - \underline{10} + 10i + \underline{5} - i \\ &= \underline{-4 + 4i} \end{aligned}$$

Binomial coefficients:

1											
	1										
		2									
			3								
				3							
					1						
						1					
							5				
								10			
									10		
										5	
											1

$$b) \quad (1 - i)^5 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of complex plane showing } 1-i \text{ in the fourth quadrant, with angle } -\pi/4 \text{ and magnitude } \sqrt{2}. \end{array} \right\} = (\sqrt{2} e^{-i\pi/4})^5$$

Uppgift 3

$$\begin{aligned} &= 4\sqrt{2} e^{-i 5\pi/4} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of a complex plane showing a vector in the second quadrant. The vector is labeled } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ on the imaginary axis and } -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ on the real axis. The angle is } 5\pi/4. \end{array} \right\} \\ &= 4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \underline{-4 + 4i} . \end{aligned}$$

Svar: $a, b)$ $-4 + 4i$

Uppgift 3

Uppgift 4

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ polynom} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ pol? Nej potensserie.}$$

Finns det något polynom f av grad n ,

$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$
sådant att $f(z) \equiv 0$ nollpolynom.

(a) f har oändligt många nollställen i det komplexa talplanet? **Ja**

(b) f har ändligt många men fler än n nollställen i det komplexa talplanet? **Nej. p.g. faktorisering.**

(c) f har precis n olika nollställen i det komplexa talplanet? **Ja**

(d) f har färre än n stycken olika nollställen i det komplexa talplanet? **Ja. Ja.**

(e) f har precis ett nollställe i det komplexa talplanet? **Ja. $z+1$**

(f) f saknar nollställen i det komplexa talplanet? **Ja. $p=1$.**

Ge i vart av fallen exempel på ett sådant polynom eller förklara varför något sådant polynom inte finns.

Alg f-sats: Varje icke-konstant polynom har ett nollställe i komplexa planet. $z-a$

$$i) \text{ Ja: } p(z) = k(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

- a) Bara nollpolynom $p(z) \equiv 0$.
- b) Nej, pga faktorsatsen
- c) Ja, tex $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$
för olika $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
- d) Ja, tex z^n
- e) Räkna med multiplicitet så är det bara polynom av grad 1 som funkar här
tex $p(z) = z$.
- f) Ja, tex $p(z) \equiv 1$. (konstante polynom).

Uppgift 4

Uppgift 5

- (a) Ekvationen $z^6 = 1$ har precis sex lösningar i det komplexa talplanet. Bestäm dessa!
- (b) Visa i en figur hur lösningarna till ekvationen $z^6 = 1$ ligger i det komplexa talplanet.
- (c) Visa att det finns en lösning ω till ekvationen $z^6 = 1$ som är sådan att mängden av alla lösningarna ges av $z_0 = \omega^0$, $z_1 = \omega^1$, $z_2 = \omega^2$, $z_3 = \omega^3$, $z_4 = \omega^4$ och $z_5 = \omega^5$.
- d) Formulera motsvarande påstående för det generella fallet med lösningar till ekvationen $z^n = 1$ där n är ett positivt heltal. (En lösning till $z^n = 1$ kallas en enhetsrot av ordning n)

Uppgift 5

$z^6 = 1$. Vi går över till polär form
och skriver $z = r e^{i\theta}$ och $1 = e^{i(0+n2\pi)}$,
 n helld.

Ekvationen kan vi skriva

$$(r e^{i\theta})^6 = e^{i(0+n2\pi)} \quad n \text{ helld} \quad \text{---}$$

$$\Leftrightarrow r^6 e^{i6\theta} = 1 \cdot e^{in2\pi}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\theta = n2\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{n2\pi}{6} = n\frac{\pi}{3}, n \text{ helld.} \end{cases} \quad (r \geq 0)$$

vi får lösningarna: $z = e^{in\pi/3}$, $n=0,1,\dots,5$. Dvs:

Uppgift 5

$$z_0 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} = 1$$

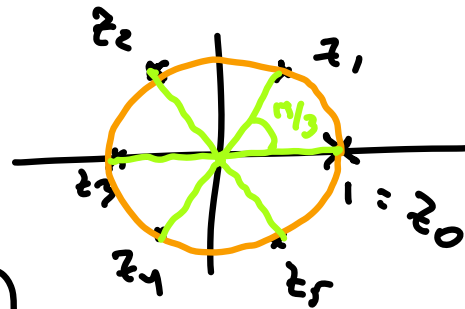
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot e^{i\pi/3} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 1 \cdot e^{i2\pi/3} = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$z_3 = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$$

$$\begin{aligned} z_4 &= 1 \cdot e^{i4\pi/3} = 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$z_5 = 1 \cdot e^{i5\pi/3} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



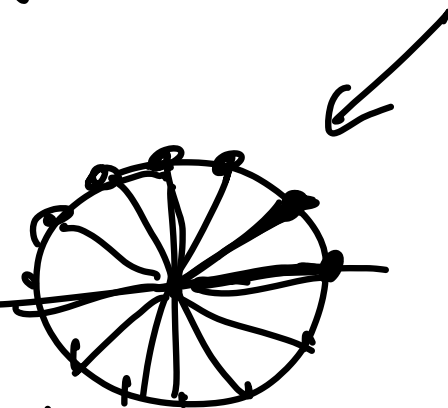
enhets
cirkeln.

Uppgift 5

c) $z_1 = e^{i\pi/3} = \omega$ primitiv 6:e enhetsrot
Kolla $z_1^0 = 1, z_1^1 = z_1, z_1^2 = z_2, z_1^3 = -z_3$
 $z_1^4 = z_4 = z_1^5 = z_5.$

(z_5 går också bra, men ingen av de andra)

d) $z^n = 1$ $\begin{cases} r=1 \\ \theta = \frac{2\pi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \end{cases}$
 $\underline{\underline{kommit: e^{i(k \frac{2\pi}{n})}, k=0, \dots, n-1.}}$
 $k=0, 1, 2, \dots, n-1.$



Uppgift 6

Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen

$$z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$$

då man vet att $z = i$ är en lösning.

$$\begin{array}{r} z^2 - 5iz - 6 \\ z - i \overline{) z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i} \\ \underline{-(z^3 - iz^2)} \\ -5iz^2 - 11z + 6i \\ \underline{-(-5iz^2 - 5z)} \\ -6z + 6i \\ \underline{-(-6z + 6i)} \\ 0 \end{array} \quad \leftarrow$$

Vi använder faktorisering:
och polynomdivision för:

$$z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$$

(=)

$$(z - i)(z^2 - 5iz - 6) = 0$$

Uppgift 6

$$z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0 \quad \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - 5iz - 6) = 0$$

$z=i$ är en nollställe, övriga nollst. fis de
 $z^2 - 5iz - 6 = 0$. Vi kvadrathoppfullerar:

$$\underline{z^2 - 5iz - 6 = 0} \quad (\approx 1)$$

$$\underline{\left(z - \frac{5i}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 6 = 0} \quad (\Rightarrow)$$

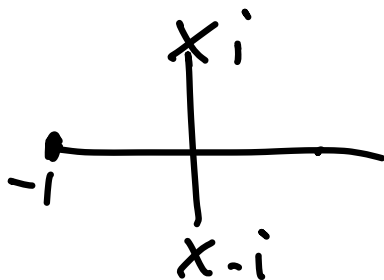
$$\left(z - \frac{5i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

$$(w^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow w = \pm \frac{i}{2})$$

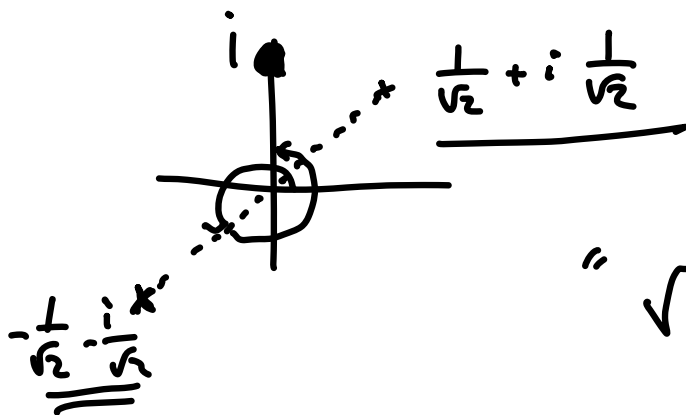
$$\Leftrightarrow z - \frac{5i}{2} = \pm \frac{i}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad z = \frac{5i}{2} \pm \frac{i}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad z = 3i \text{ el. } z = 2i$$

Svar: Lösningarna till ekv. i uppgiften är alltså $z=i, 2i, 3i$.

Uppgift 6



$$\sqrt{-1} = \pm i$$



$$\sqrt{i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

Cordons formel

pg-formel
for 3:egradeqn.

$$x^3 + px + q = 0$$

har lösna.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

cubic formula.
Mathologer youtube.

Ex: $x^3 - 15x - 4 = 0$
har lös.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{15^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{15^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \end{aligned}$$

Här ska 3:e roten tolkas komplext så den är inte entydig. I själva verket innehåller

svaret alla tre lösningarna som är

$$4, -2 + \sqrt{3} \text{ och } -2 - \sqrt{3}$$

OBS att det är 3 reella lösningar
men det krävs komplexa tal för
att skriva upp dem!

