

Föreläsning 12

SF1661 HT 21

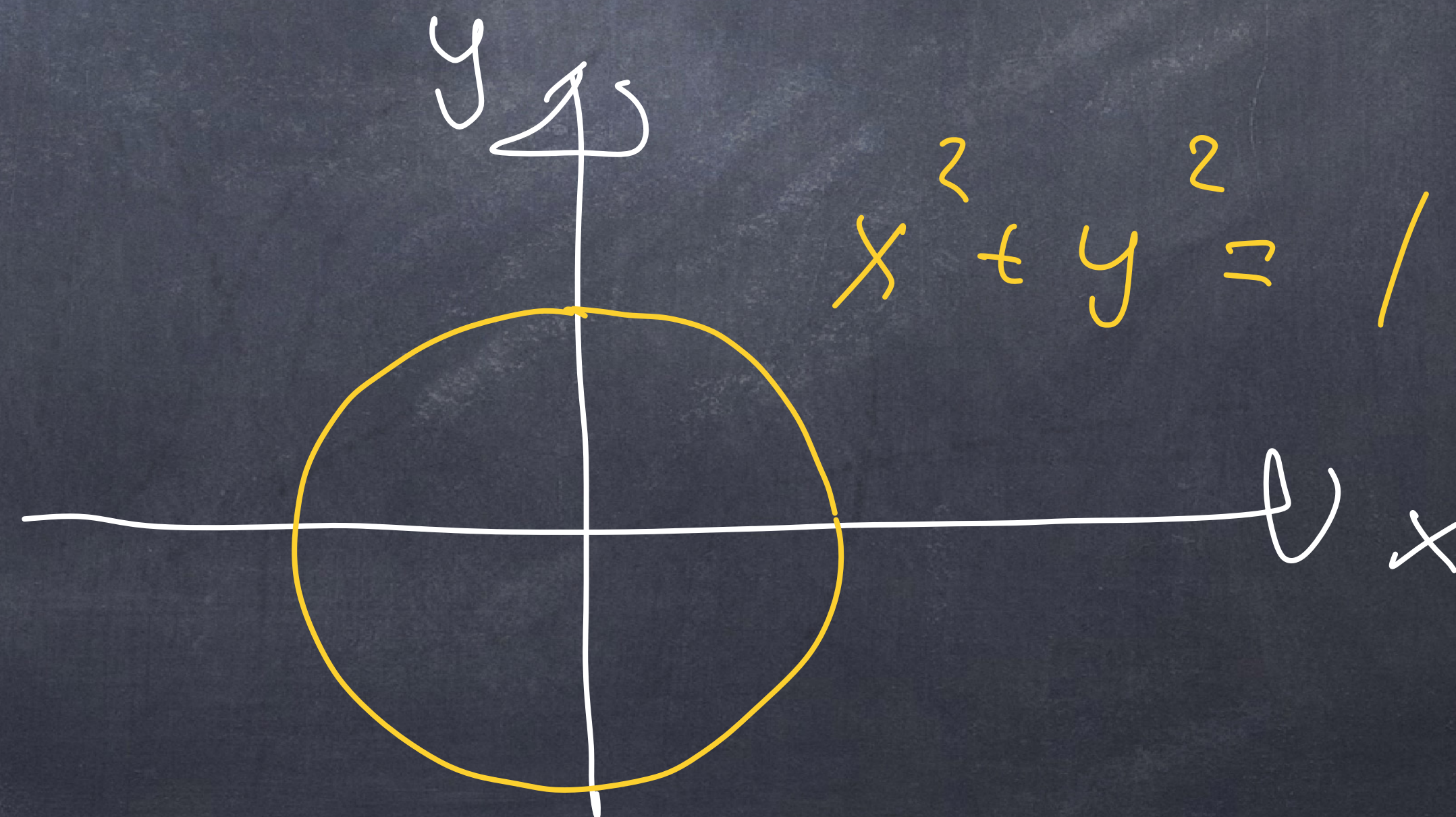
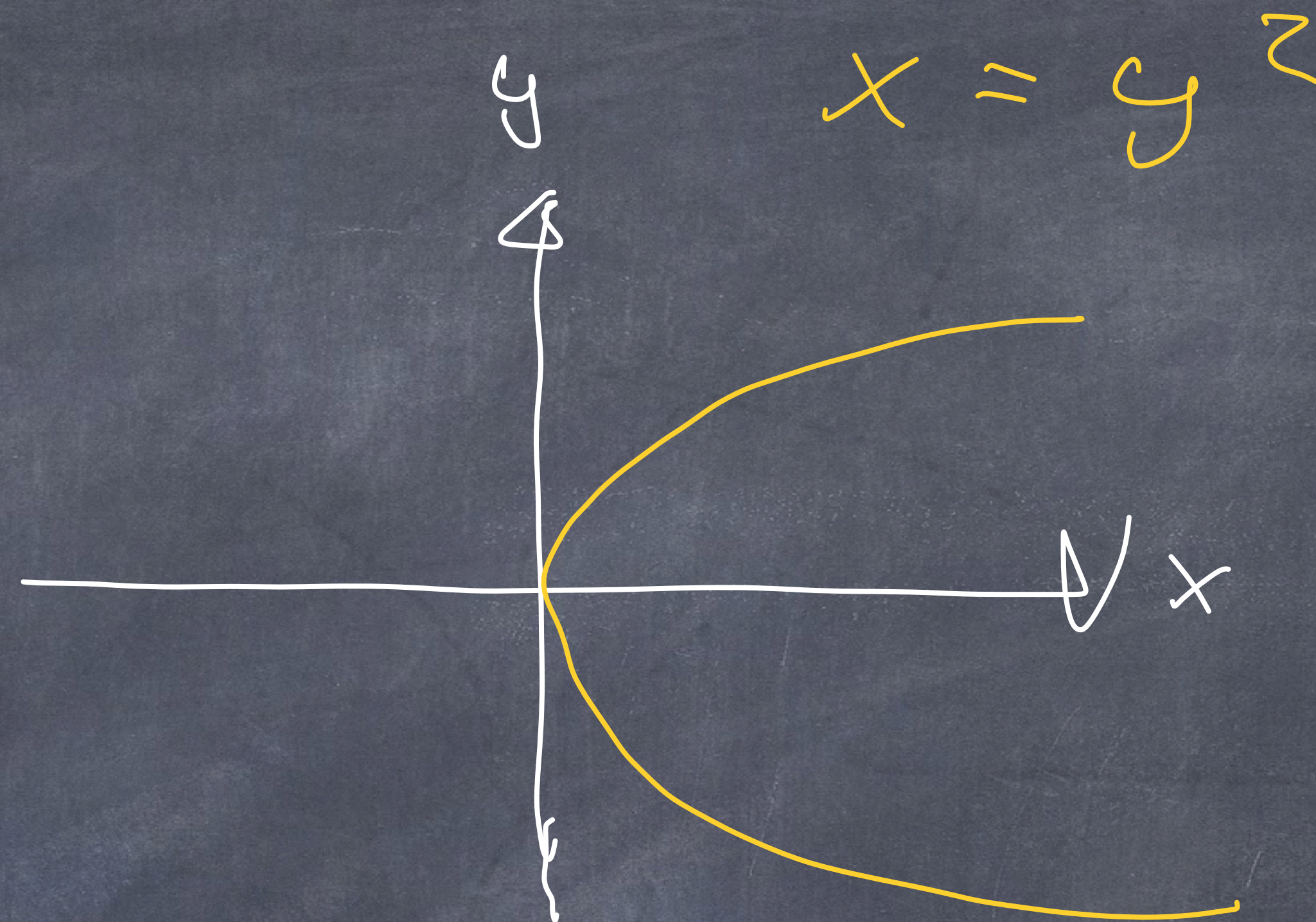
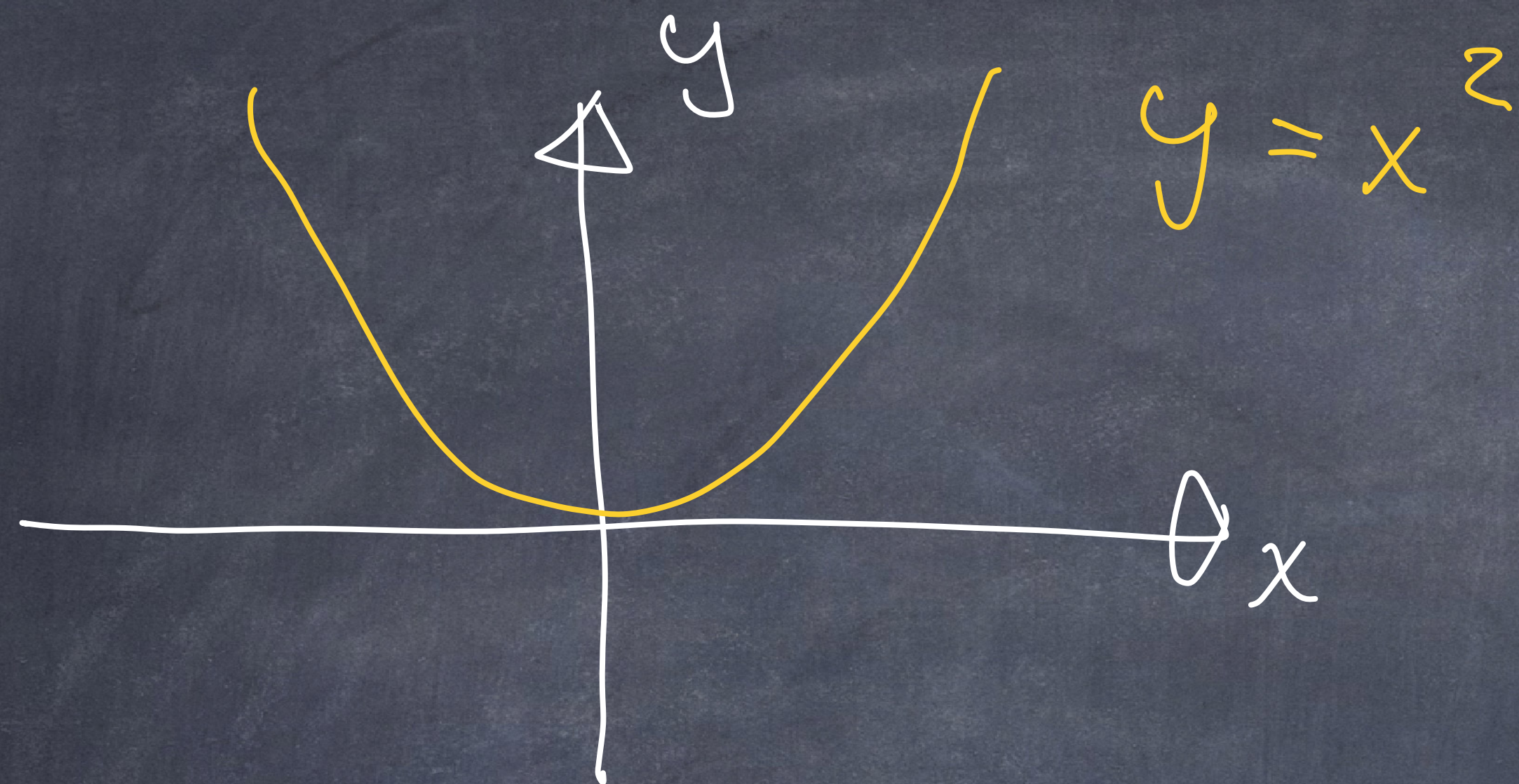
G / 10

Vad ÄR en funktion ?

• Definition

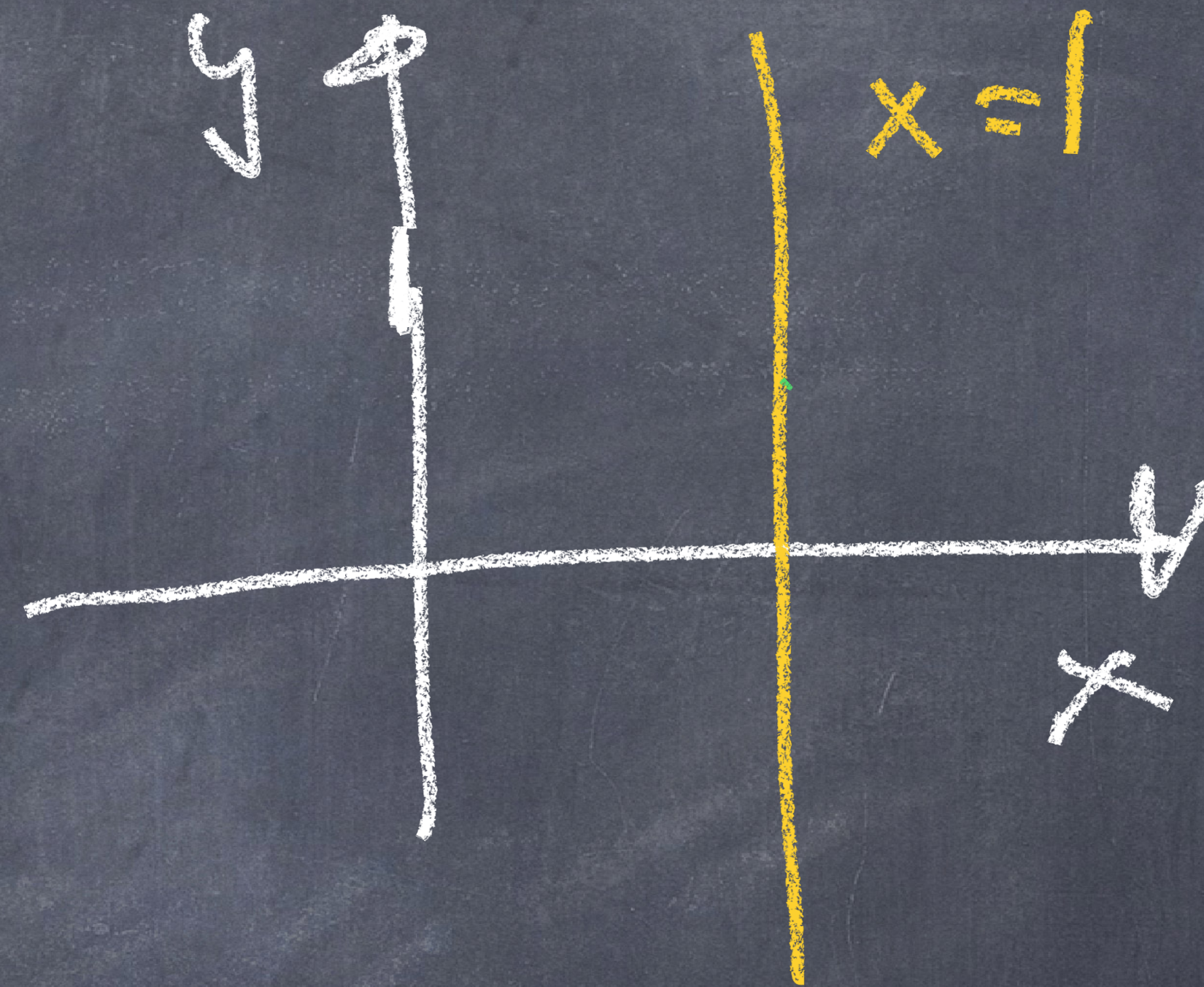
• $\equiv$ exempel

• $\vdash$ egenskaper.



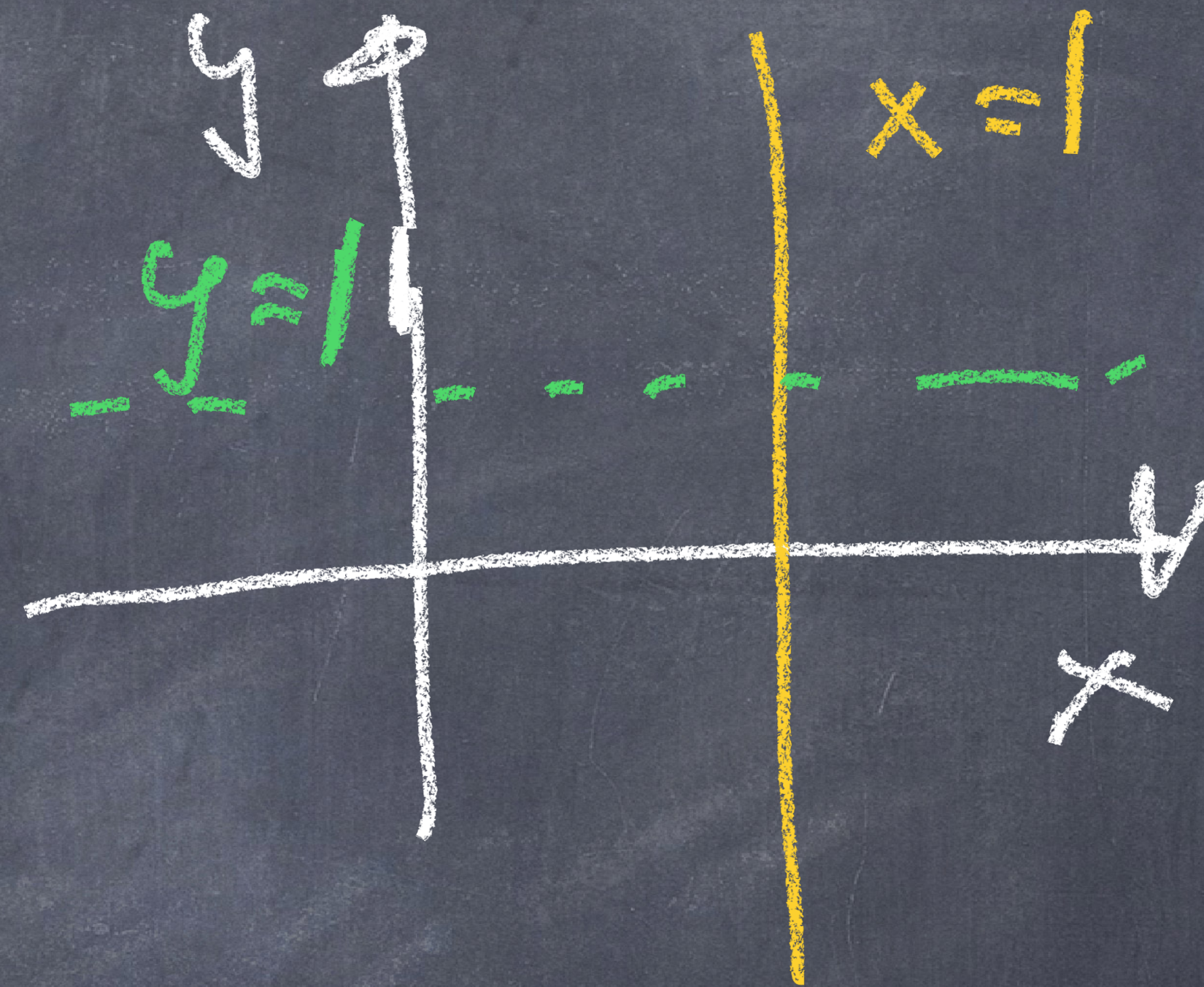
Diskussion i FB-grupp för MA-lärare

- Är $x=1$ en funktion?



Diskussion i FB-grupp för MA-lärare

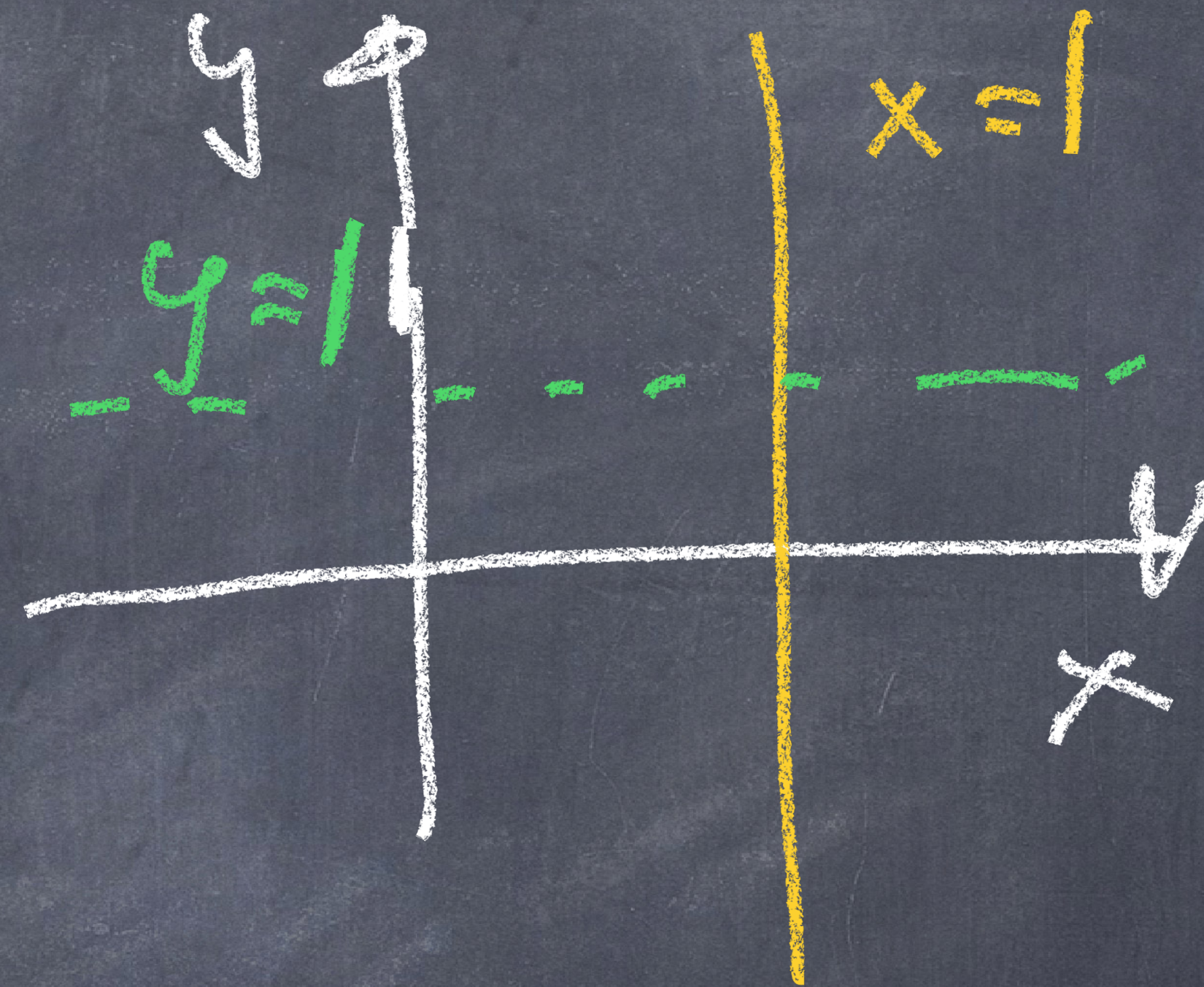
- Är $x=1$ en funktion?
- Ja, eftersom $y=1$ är en funktion borde även $x=1$ vara en funktion



Diskussion i FB-grupp för MA-lärare

- Är $x=1$ en funktion?

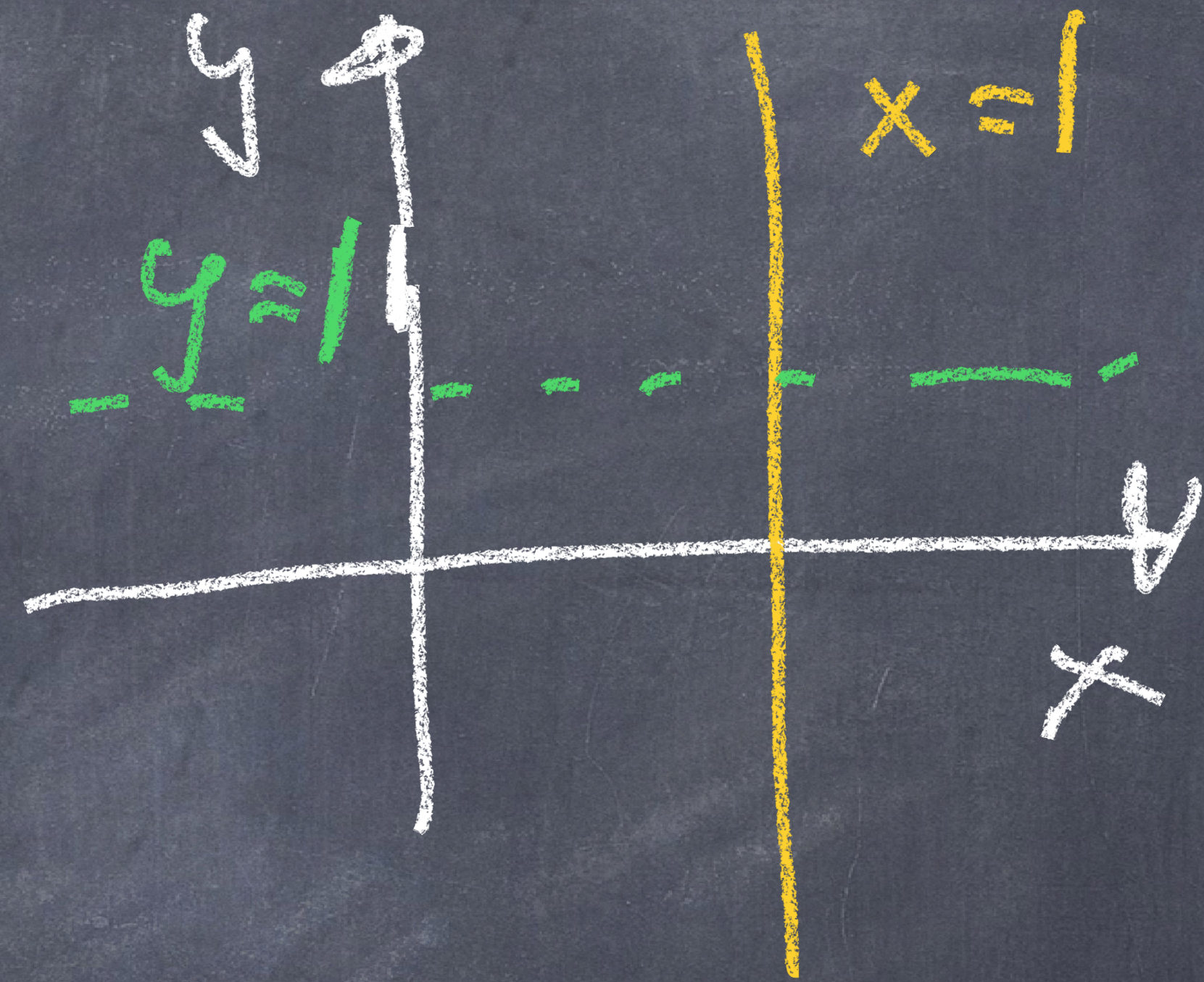
- Ja, eftersom $y=1$ är en funktion borde även $x=1$ vara en funktion



- Nej, det får bara finnas
ett y -värde till varje x -värde

Diskussion i FB-grupp för MA-lärare

- Är $x=1$ en funktion?
- Ja, eftersom $y=1$ är en funktion borde även $x=1$ vara en funktion
- Nej, det får bara finnas ett y -värde till varje x -värde
- Jo, om man ser x som funktion av y .



Preliminär definition

En funktion f är en regel
som till varje "input" r
ger exakt ett "output" s

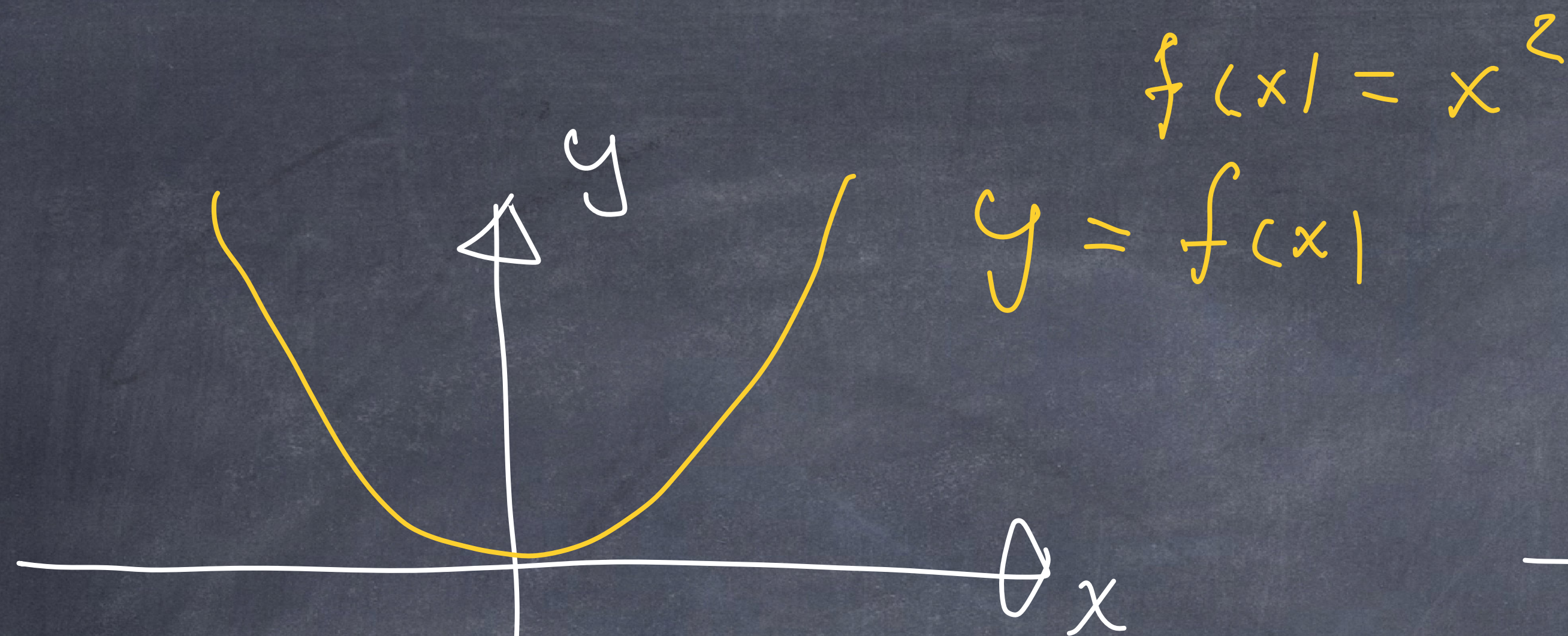


Preliminär definition

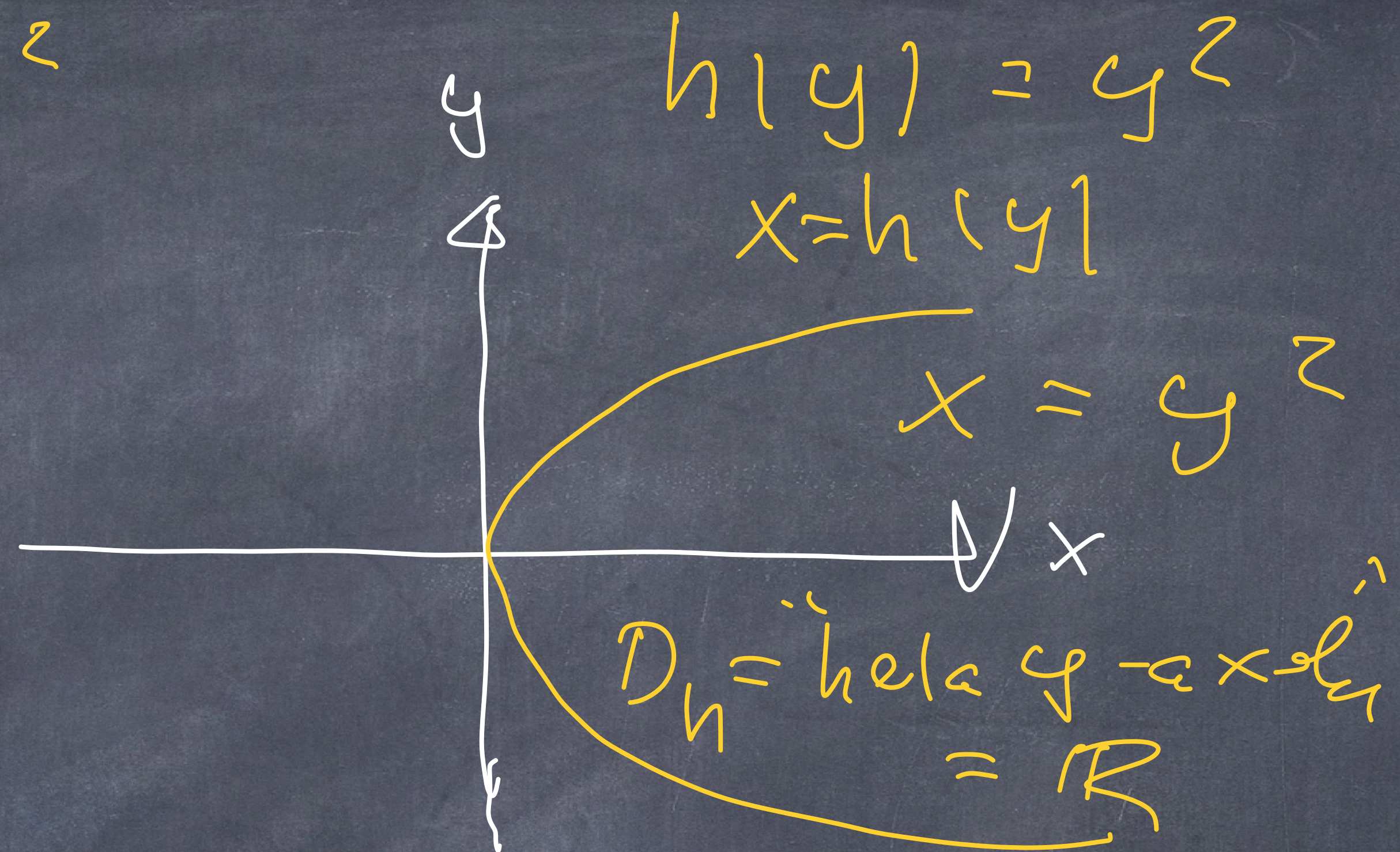
En funktion f är en regel
som till varje "input" r
ger exakt ett "output" s



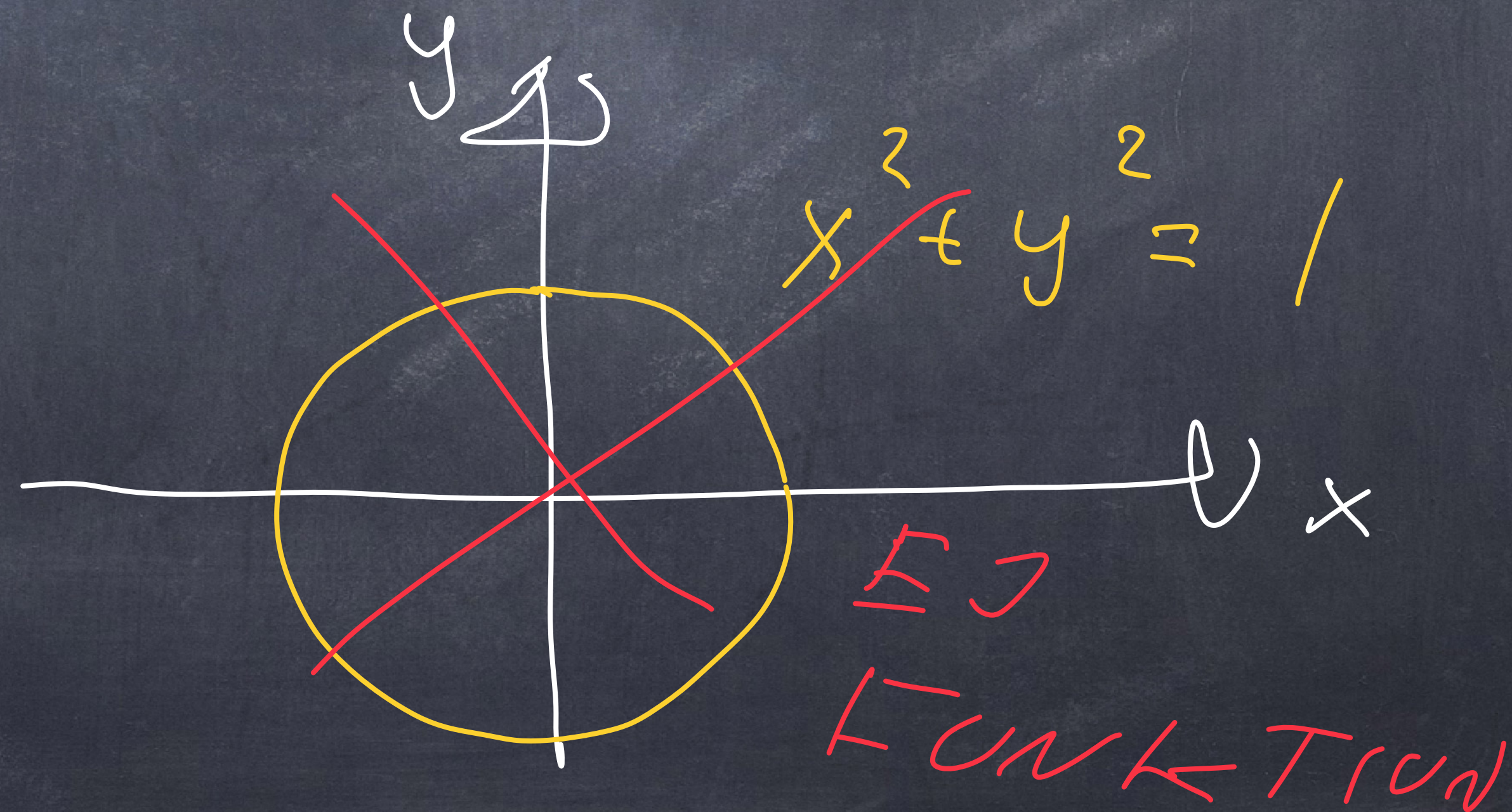
$D_f = \{ \text{tillåtna "input"-värden} \}$

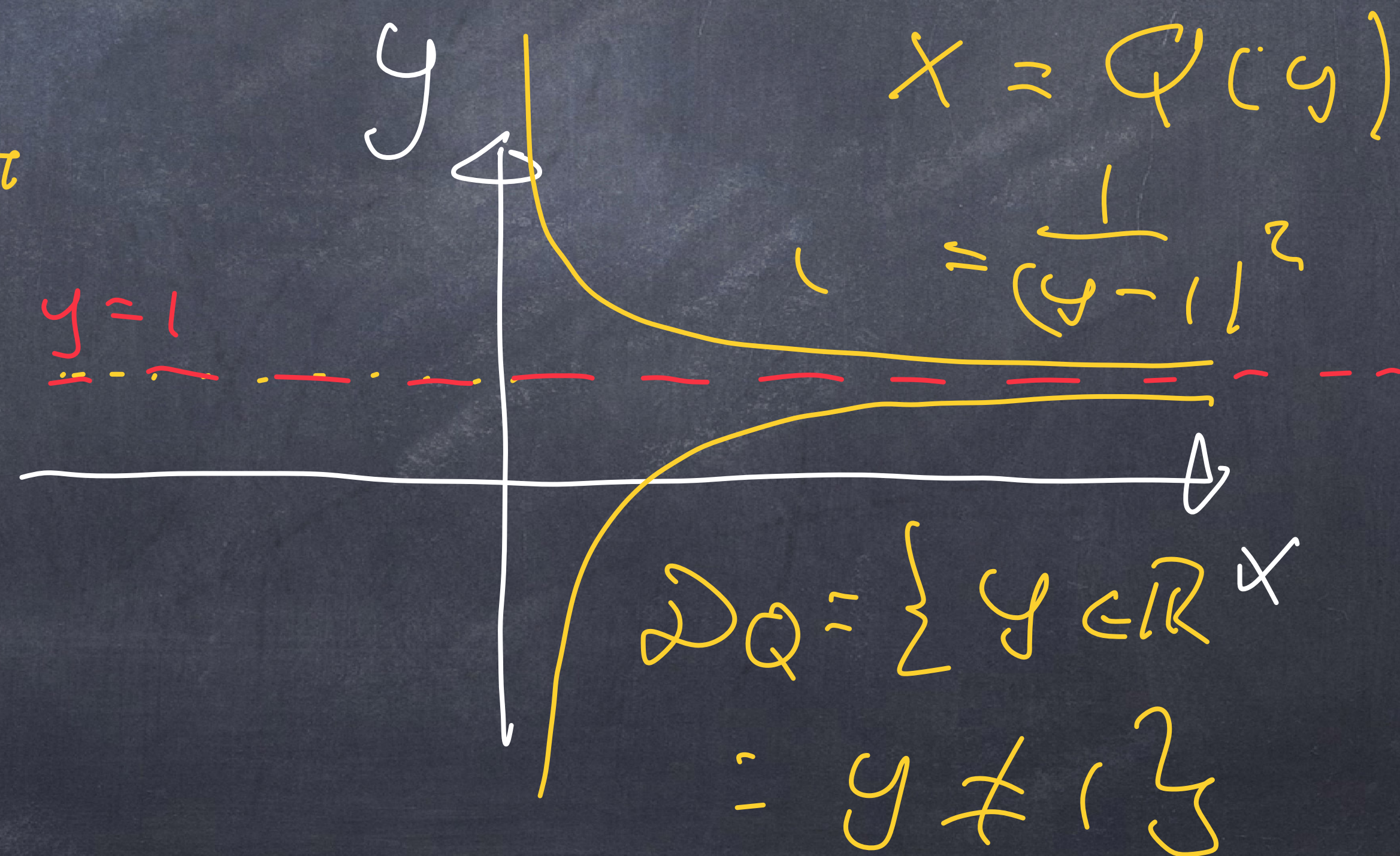
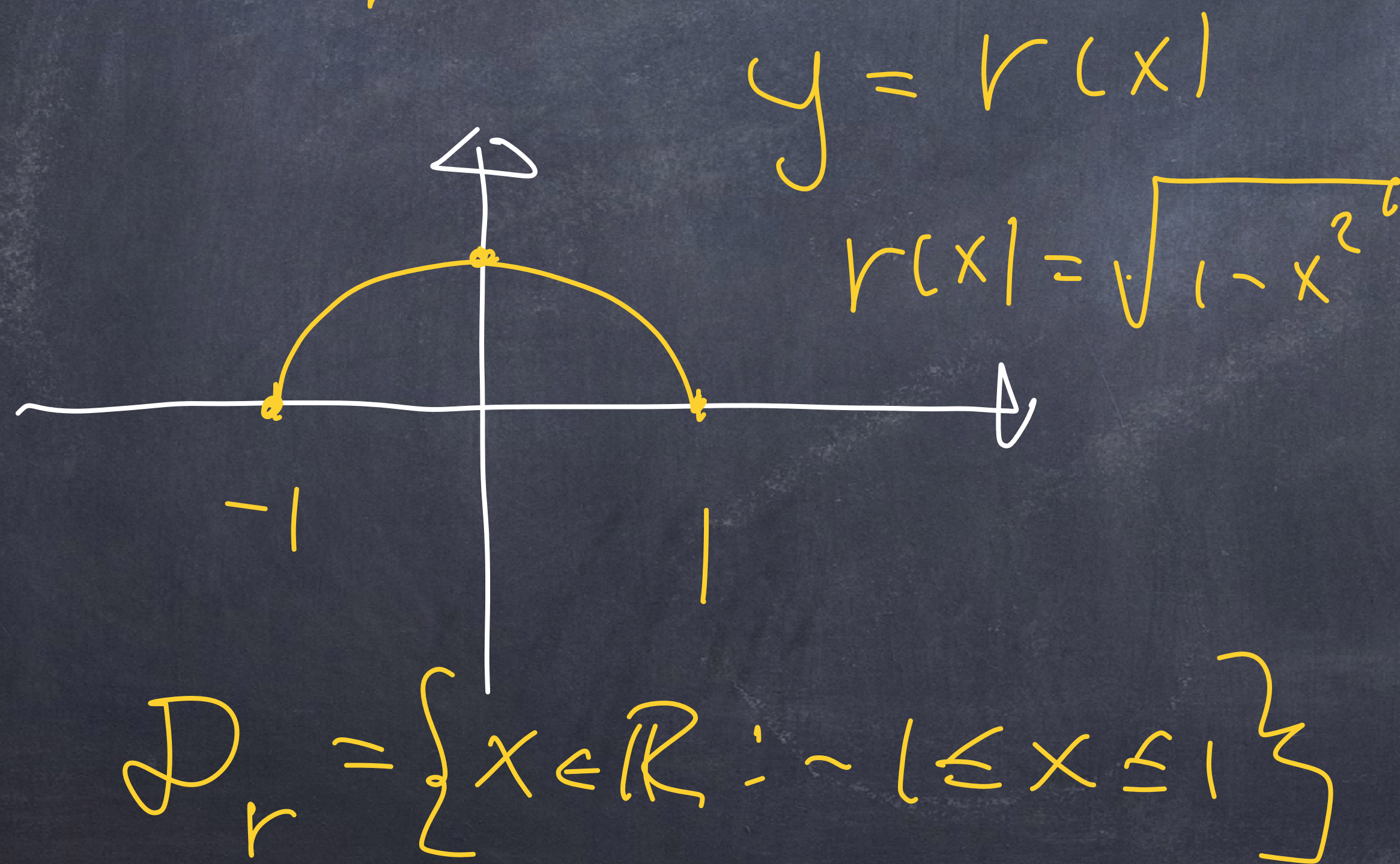
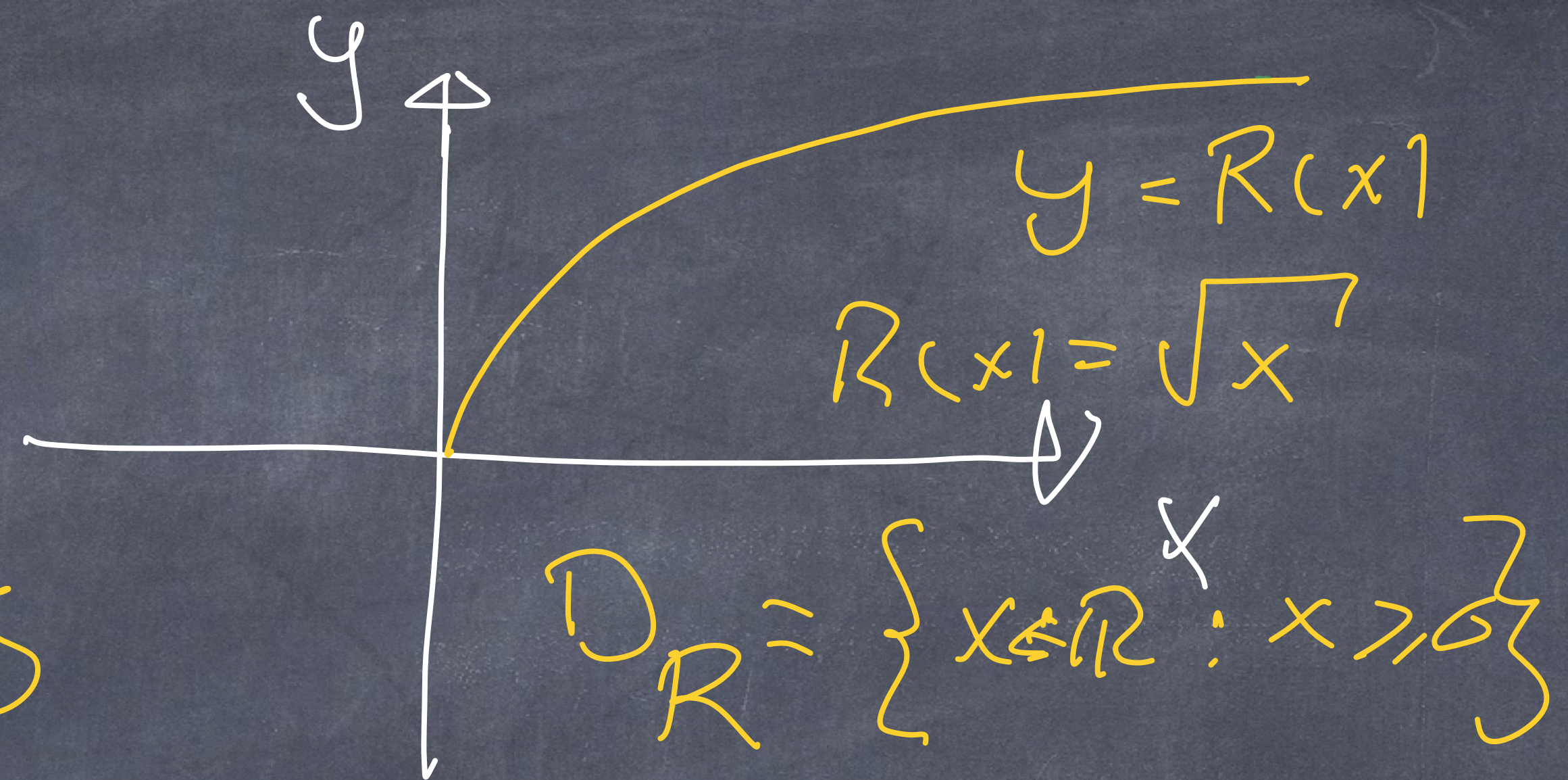
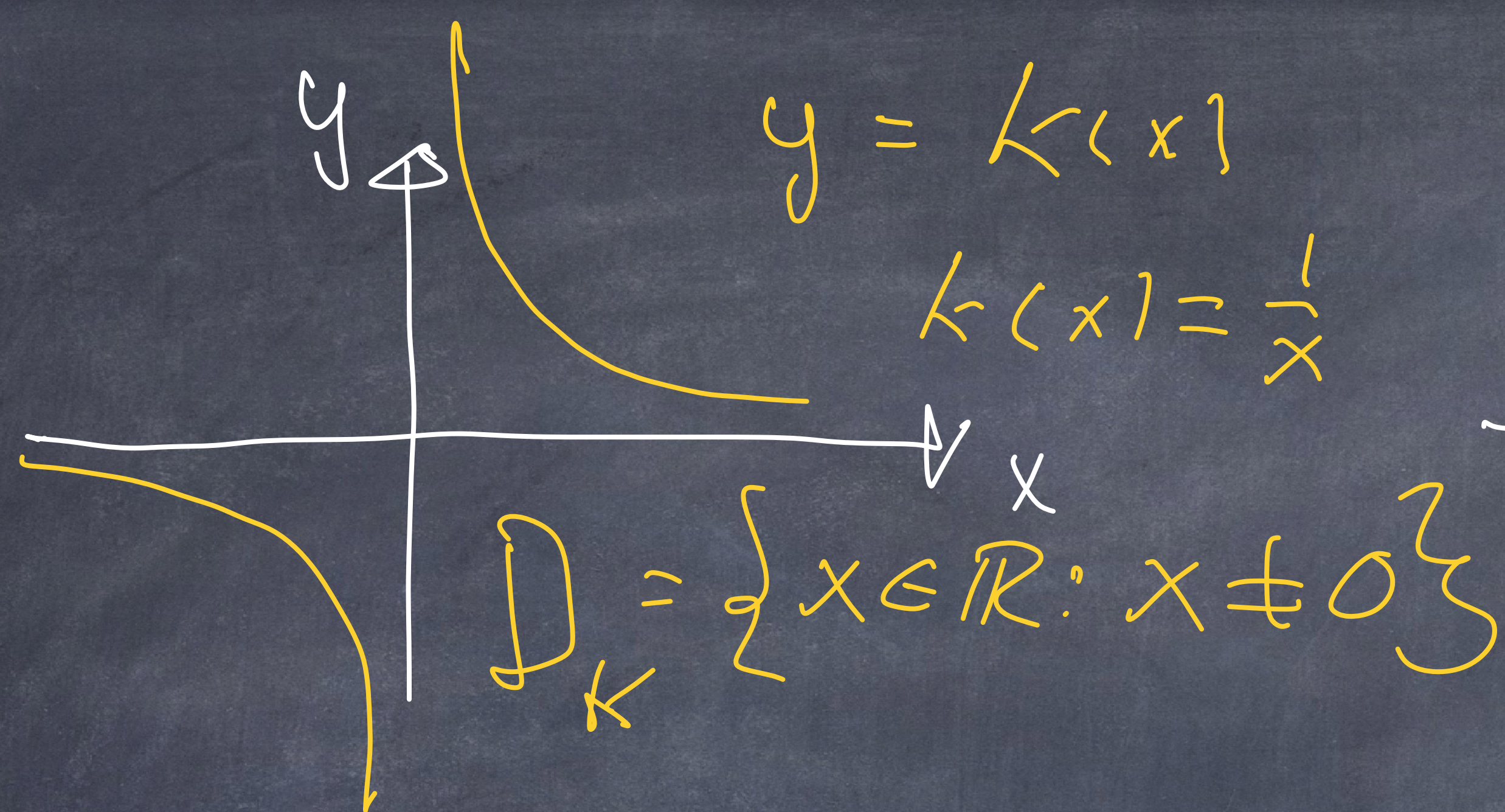


$D_f = \text{"hella x-axe"} = \mathbb{R}$



$D_g = \text{"hella x-axe"} = \mathbb{R}$





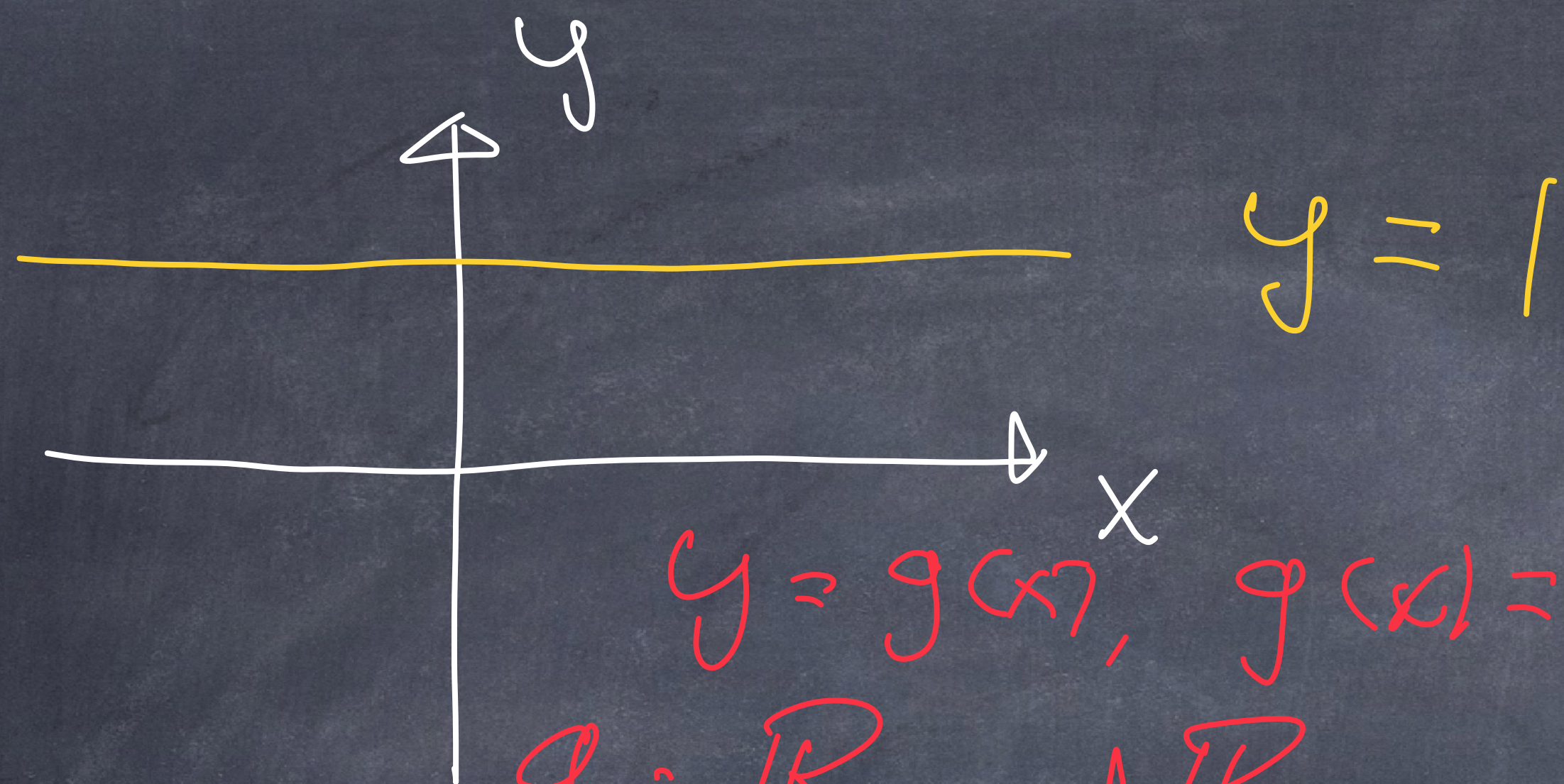
Definition: En funktion $f: S \rightarrow T$
är en regel som till varje $x \in S$
ger precis ett $y = f(x) \in T$



S är funktionens definitionsmängd

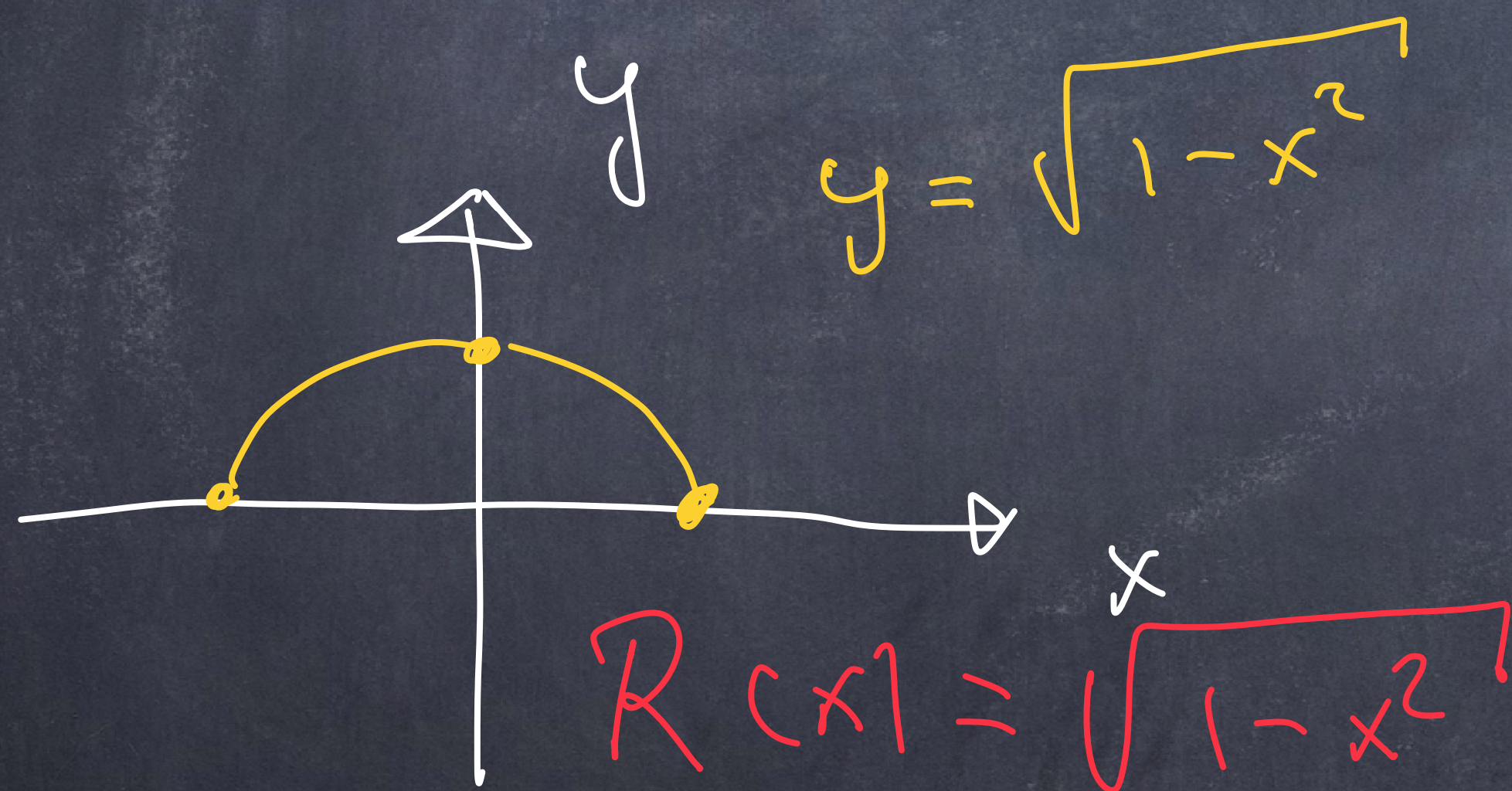
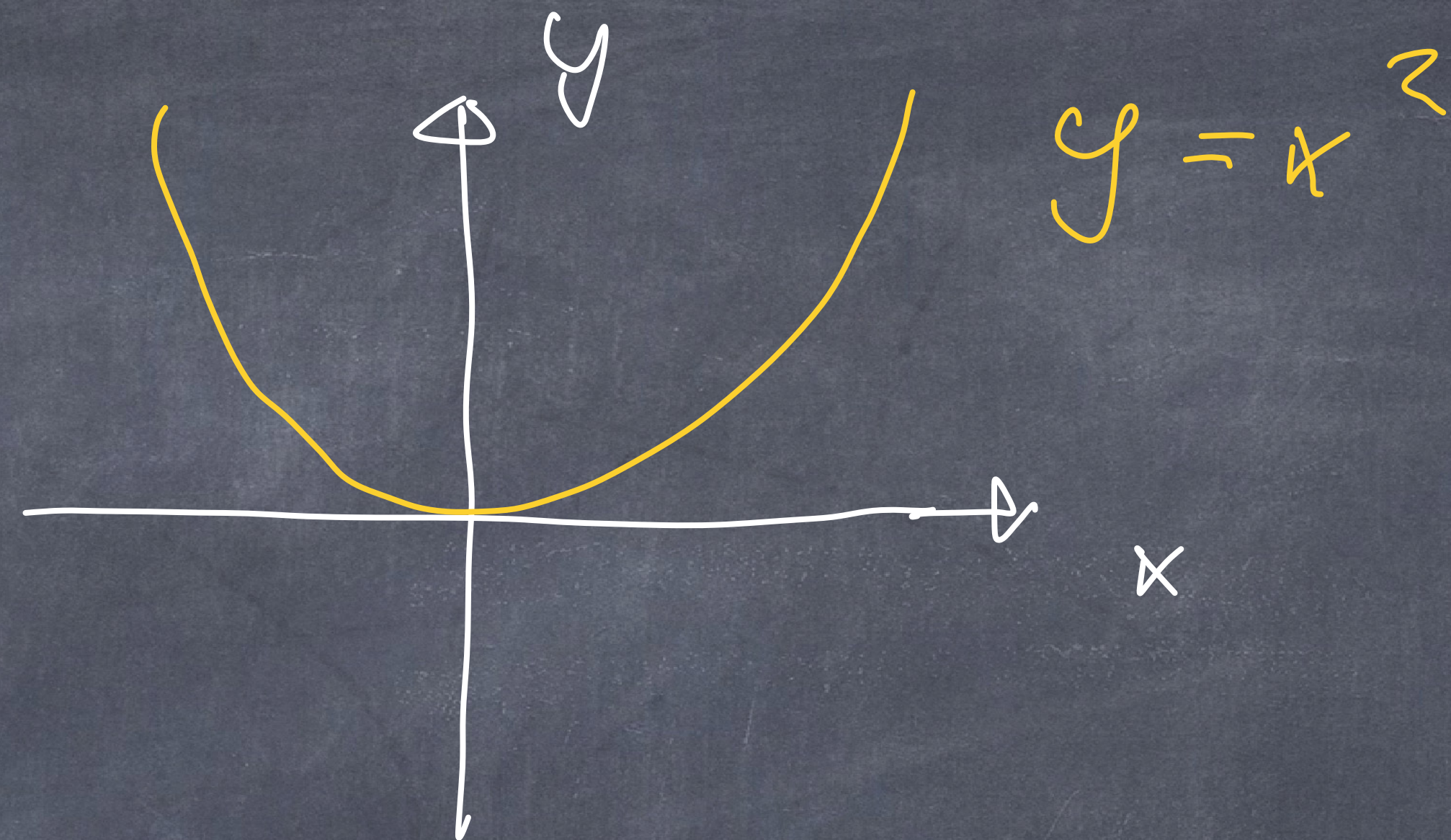
(skrivs också D_f)

T är funktionens målmängd.



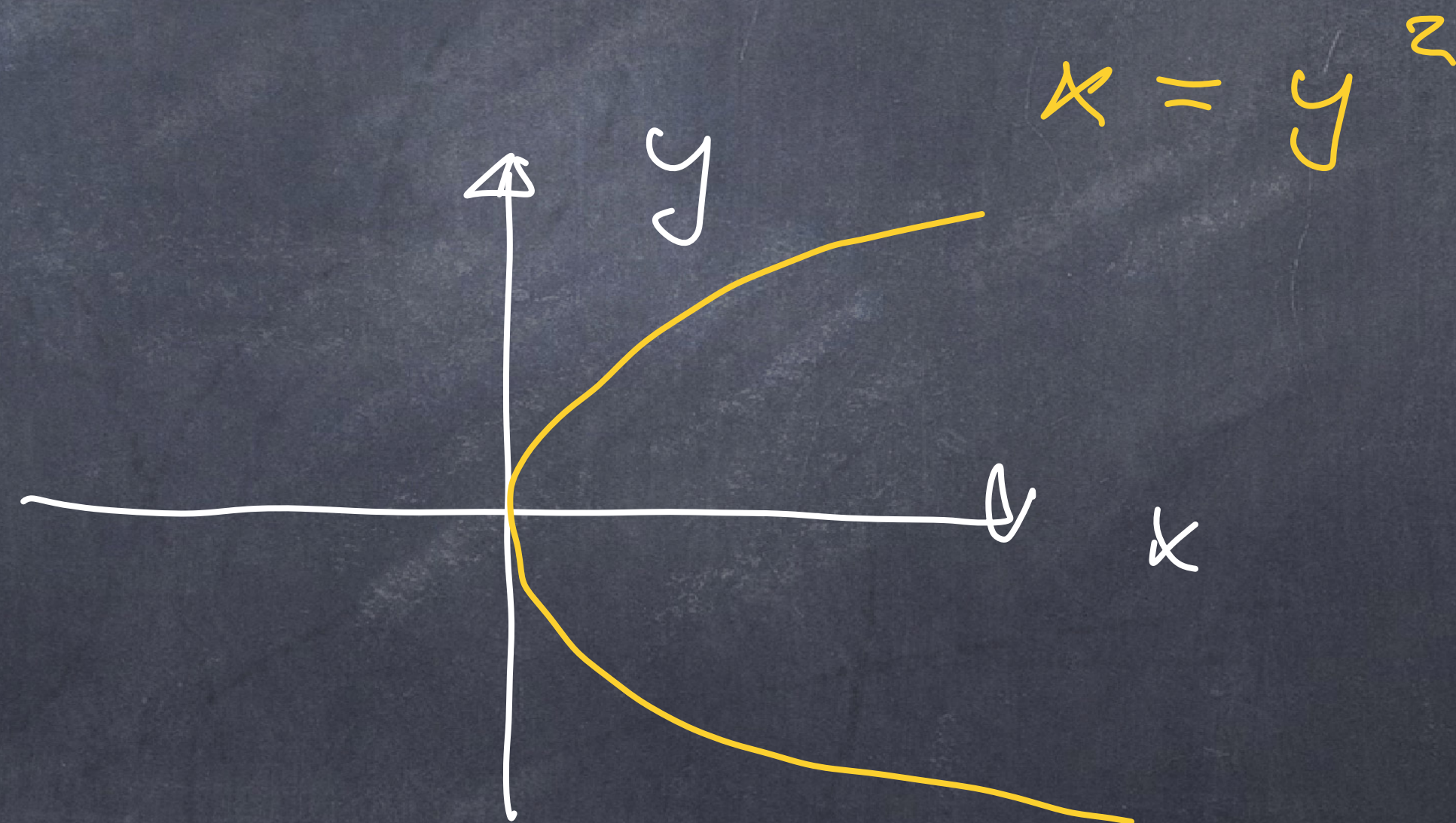
$$y = g(x), \quad g(x) = 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$R(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$R: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$



Om definitionsmängden

- Om inget sägs, antas definitionsmängden vara största "matematiskt möjliga"

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_f = (0, \infty)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

NATURLIG def. mngd.

- Definitionsmängden kan begränsas till mindre mängd när så är lämpligt.

$$A(r) = \pi r^2$$

$A =$ "arean av cirkel med radie r "

Vi tänker på r som "radie", så $r \geq 0$: $D_A = [0, \infty)$

Ex: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = |z|.$

$= D_f$, definitions mængde $\searrow$ mål mængde

Ex: $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \pi(n) = \text{antal primtal} \leq n$

$\searrow$ mål mængde

D_π , definitions mængde

Ex:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

För $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definierar vi

$$w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2) + 2i xy}$$

Ex:

$$f = \{a, b, c\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = -1$$

Definition: Om $f: S \rightarrow T$
är värdemängden V_f

den delmängd av målmängden T ,

$V_f \subseteq T$, som ges av

$$V_f = \{ y \in T : y = f(x), \text{ ngt } x \in S \}$$



Ex: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Mälmängd $\mathbb{R}$



Ex:

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d: \mathbb{R}^2$$

(xy-plane)



$$\mathbb{R}$$

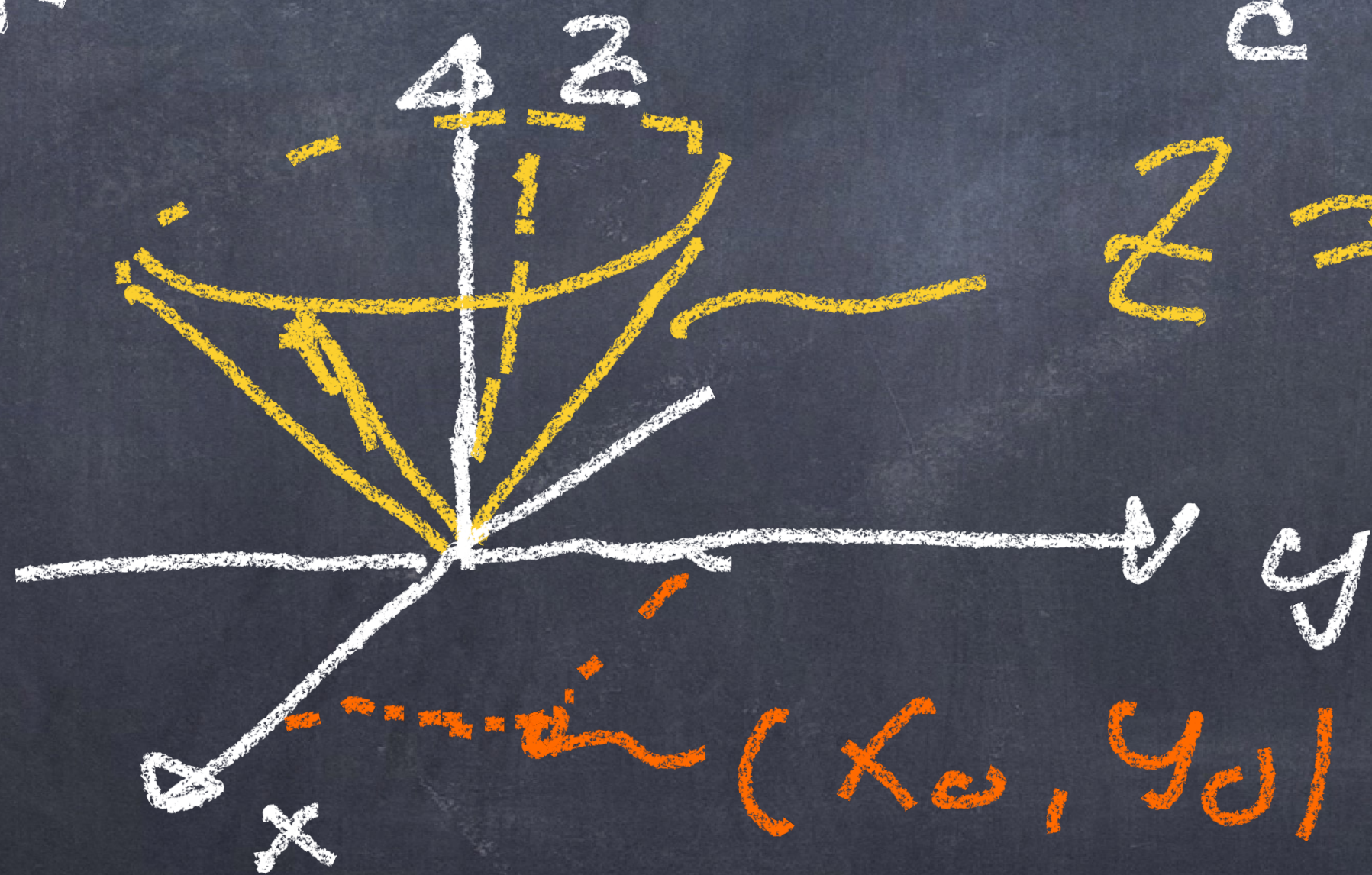
(measuring)

z-axis

$$D_d = \mathbb{R}^2 =$$

$$V_d = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$$

$$z = d(x, y)$$



Bestäm värdemängden:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(n) = 2n$$

$$V_f = \left\{ \begin{array}{l} \text{jämnna} \\ \text{naturliga} \\ \text{talet} \end{array} \right\}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = e^x$$

$$V_g = (0, \infty]$$

$$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = e^x$$

$$V_h = [1, \infty)$$

Injektiva

funktioner

Surjektiva

funktioner

Bijektiva

funktioner

Def: $f: \underline{X} \rightarrow Y$ är en
injektion (eller injektiv funktion)

om

$$\underline{f(a) = f(b) \Rightarrow a = b}$$

(eller ekvivalent
 $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$)

Example: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$

is an injection, try.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2a - 1 = 2b - 1 \Rightarrow 2a = 2b \\ \Rightarrow a = b$$

Exempel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
är en injektion, ty

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2a - 1 = 2b - 1 \Rightarrow 2a = 2b \\ \Rightarrow a = b$$

Exempel: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$
är inte injektiv ty

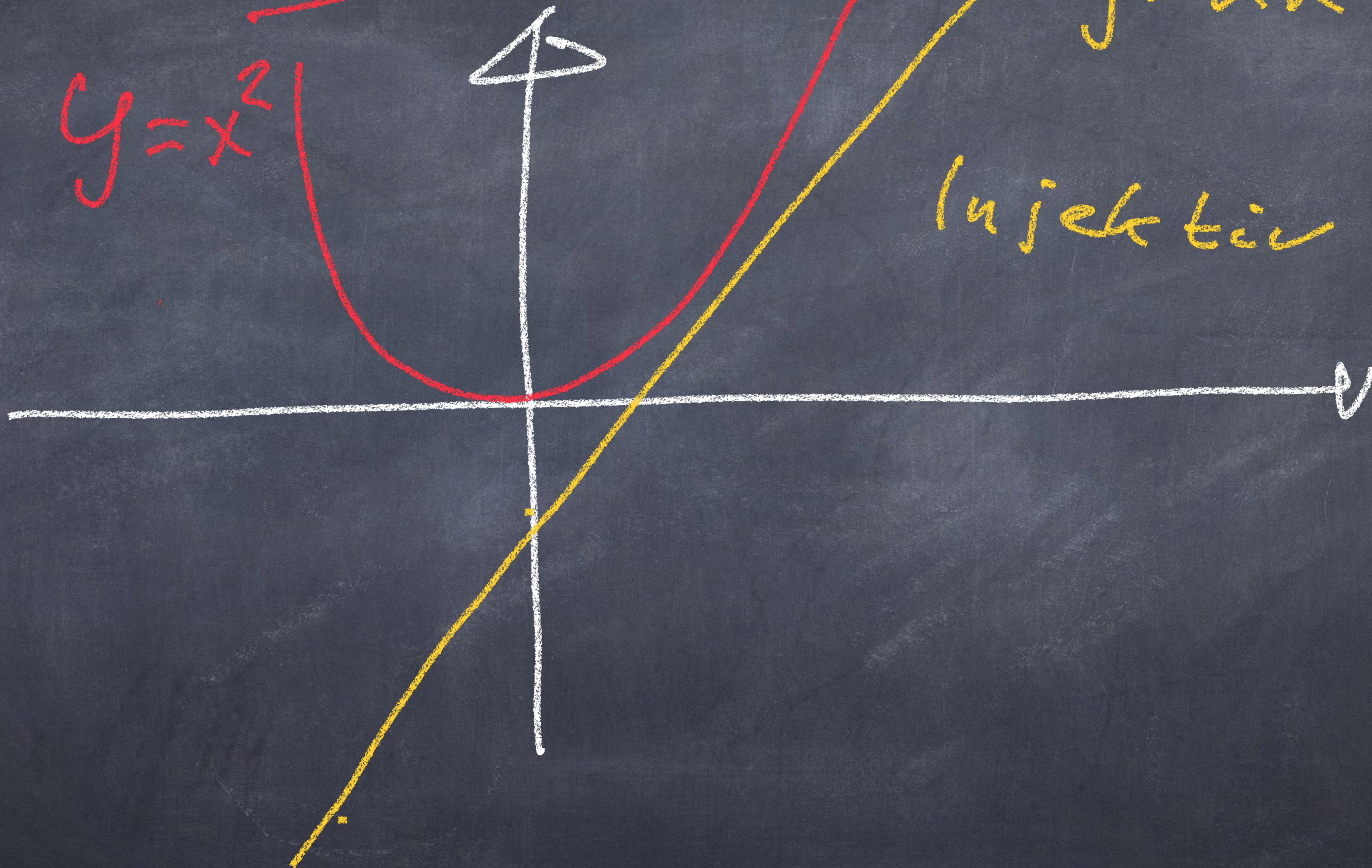
$$\text{t.ex. } g(1) = g(-1), \quad 1 \neq -1.$$

Es injektiv

$$y = x^2$$

$$y = 2x - 1$$

injektiv



Om f är en funktion gäller

$$a = b \implies f(a) = f(b)$$

vilket är ekvivalent med att

$$f(a) \neq f(b) \implies a \neq b$$

Om f är injektion gäller också

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

vilket är ekvivalent med att

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$$

Definition: $f: X \rightarrow Y$ kallas
en surjektion (eller en surjektiv
funktion) om $V_f = Y$.

dus. om det finns varje

$y \in Y$ finns ett $x \in X$

s.a.

$y = f(x)$.

Exempel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
är inte surjektiv, t.ex finns
inget $x \in \mathbb{R}$ s.a $f(x) = 2$.

Exempel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

är inte surjektiv, t.ex finns

enget $x \in \mathbb{R}$ s.a. $f(x) = 2$.

genom att inskränka mängden
för en surjektion.

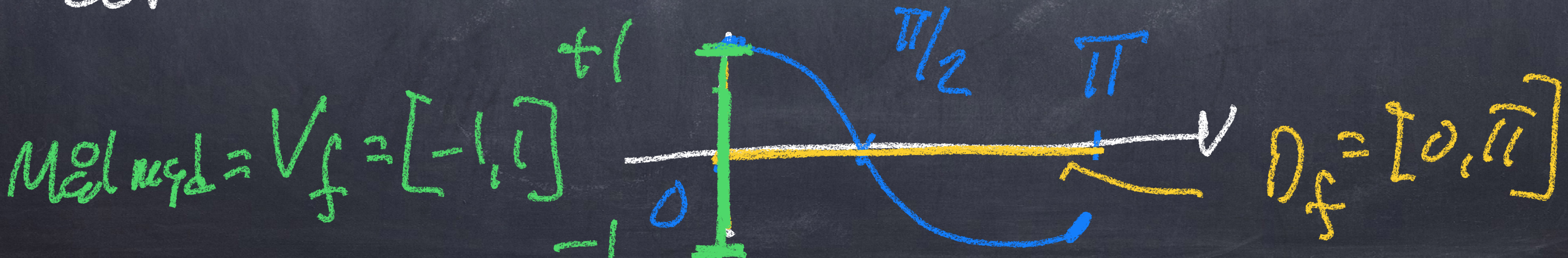
1. $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $h(x) = \sin x$

är surjektiv, t.ex till varje
 $y \in [-1, 1]$ finns $x \in \mathbb{R}$ s.a. $\sin x = y$.

Om $f: X \rightarrow Y$ är både
injektiv & surjektiv, sägs f vara
en bijektiv funktion (en bijektion)

Om $f: X \rightarrow Y$ är både
injektiv & surjektiv, sägs f vara
en bijektiv funktion (en bijektion)

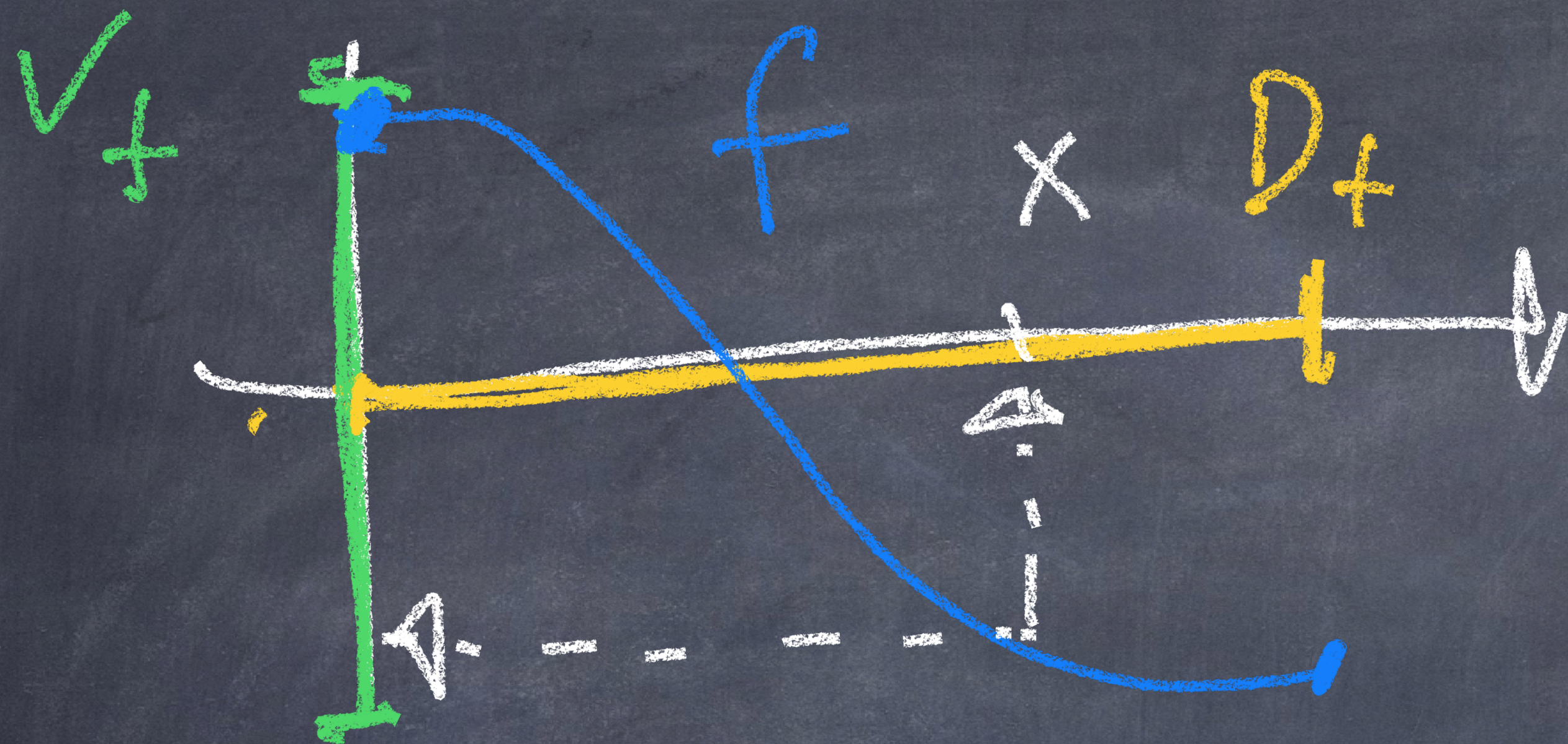
Ex: $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$
är en bijektion



Om $f: \underline{X} \rightarrow Y$ är en bijektion
gäller att

- för varje $y \in Y$ finns minst
ett $x \in \underline{X}$ s.a. $f(x) = y$ (surjektivitet)
- för varje $y \in Y$ finns högst
ett $x \in \underline{X}$ s.a. $f(x) = y$ (injektivitet)

$\Rightarrow$ för varje $y \in Y$ finns exakt
ett $x \in \underline{X}$ s.a. $f(x) = y$ (bijektivitet)



$f: D_f \rightarrow V_f$
 är en bijektion.

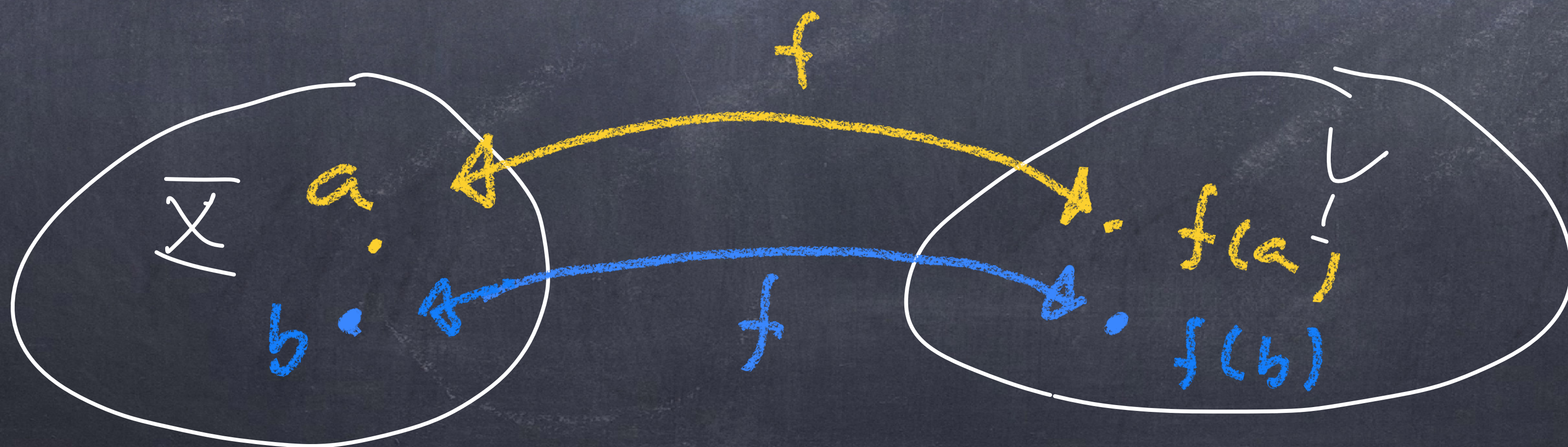
- Till varje $x \in D_f$ finns precis ett $y \in V_f$ s.a. $y = f(x)$ (f funktion)
- Till varje $y \in V_f$ finns precis ett $x \in D_f$ s.a. $y = f(x)$ (f bijektion)

alts en bijektion $f: S \rightarrow \overline{T}$

"parvis ihop" elementen i

S med dem i $\overline{T}$ så att

$$a \neq b \iff f(a) \neq f(b)$$



En funktion $f: \underline{X} \rightarrow Y$ kallas
inverterbar om det finns en
funktion $h: Y \rightarrow \underline{X}$ sådan att

$$h(f(x)) = x \quad \forall x \in \underline{X}, \quad f(h(y)) = y, \quad \forall y \in Y.$$

h kallas f 's *invers funktion*

och skrivs $h(x) = f^{-1}(x)$

Exempel: $f(x) = 2x$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
är inverterbar med invers $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

tg $f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

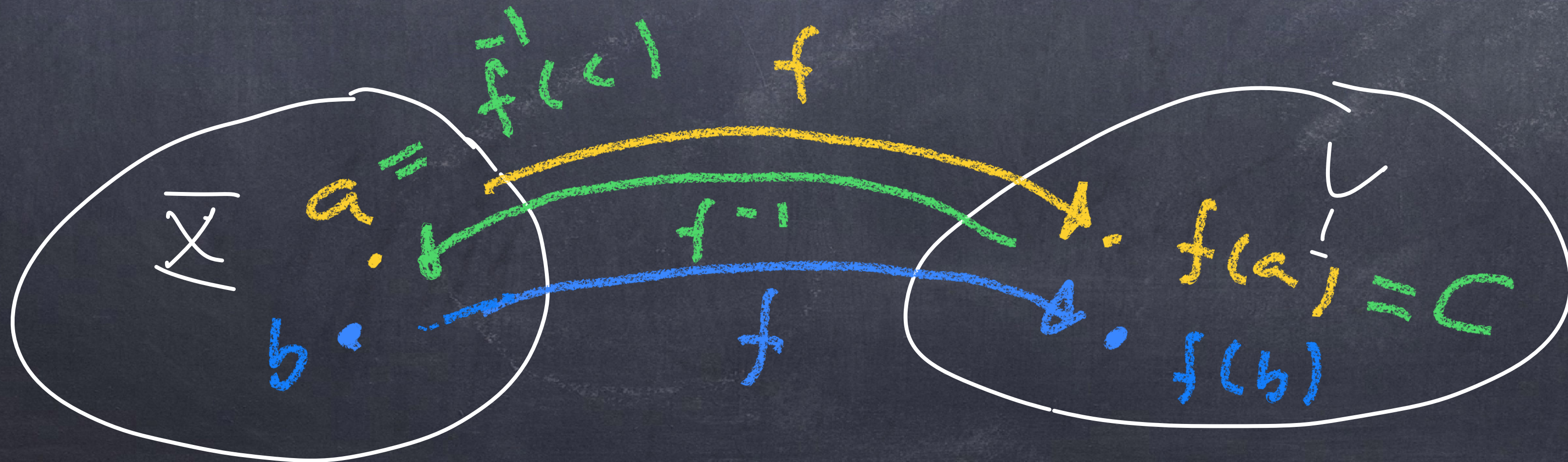
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{2x}{2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

SATS: $f: \underline{X} \rightarrow Y$ är inverterbar

$\iff$
 f är bijektiv

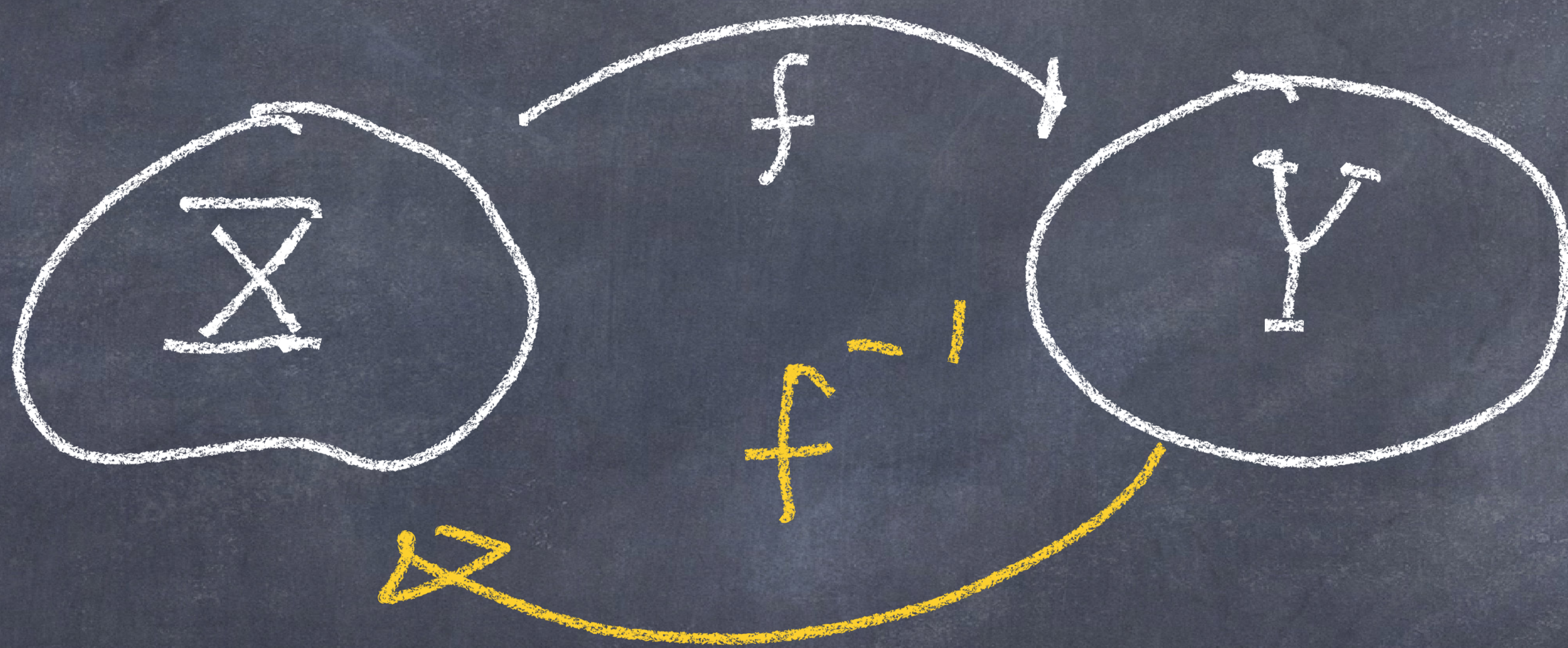
$f^{-1}: Y \rightarrow \underline{X}$ definieras då av

$$f^{-1}(c) = a \iff c = f(a)$$



$$f: X \rightarrow Y$$

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$



$$y = f(x)$$

$$\longleftrightarrow$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$X = D_f = V_{f^{-1}}$$

$$Y = V_f = D_{f^{-1}}$$

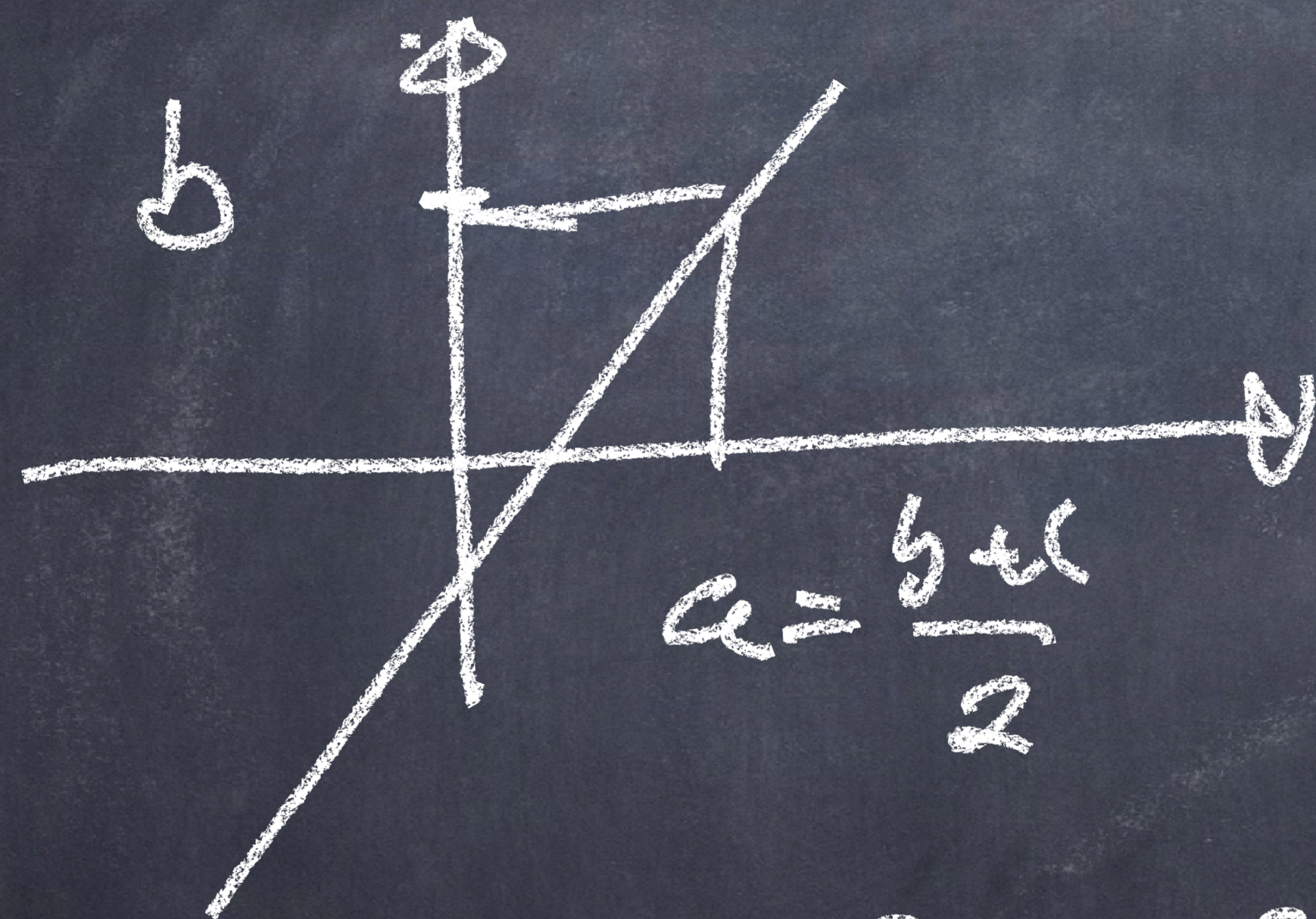
Exempel: Visa att $f(x) = 2x - 1$ är
inverterbar och bestäm dess invers.

Tag $b \in V_f = \mathbb{R}$. Om vi kan visa att
det finns precis ett $a \in D_f = \mathbb{R}$
s.a. $f(a) = b$ är f både injektiv
& surjektiv,
dvs bijektiv och därmed inverterbar

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 2a - 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = b + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b+1}{2}$$

Also f invertierbar.



$$y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

So

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}, \quad \left(f^{-1}(f(x)) = \frac{x+1}{2} \right)$$

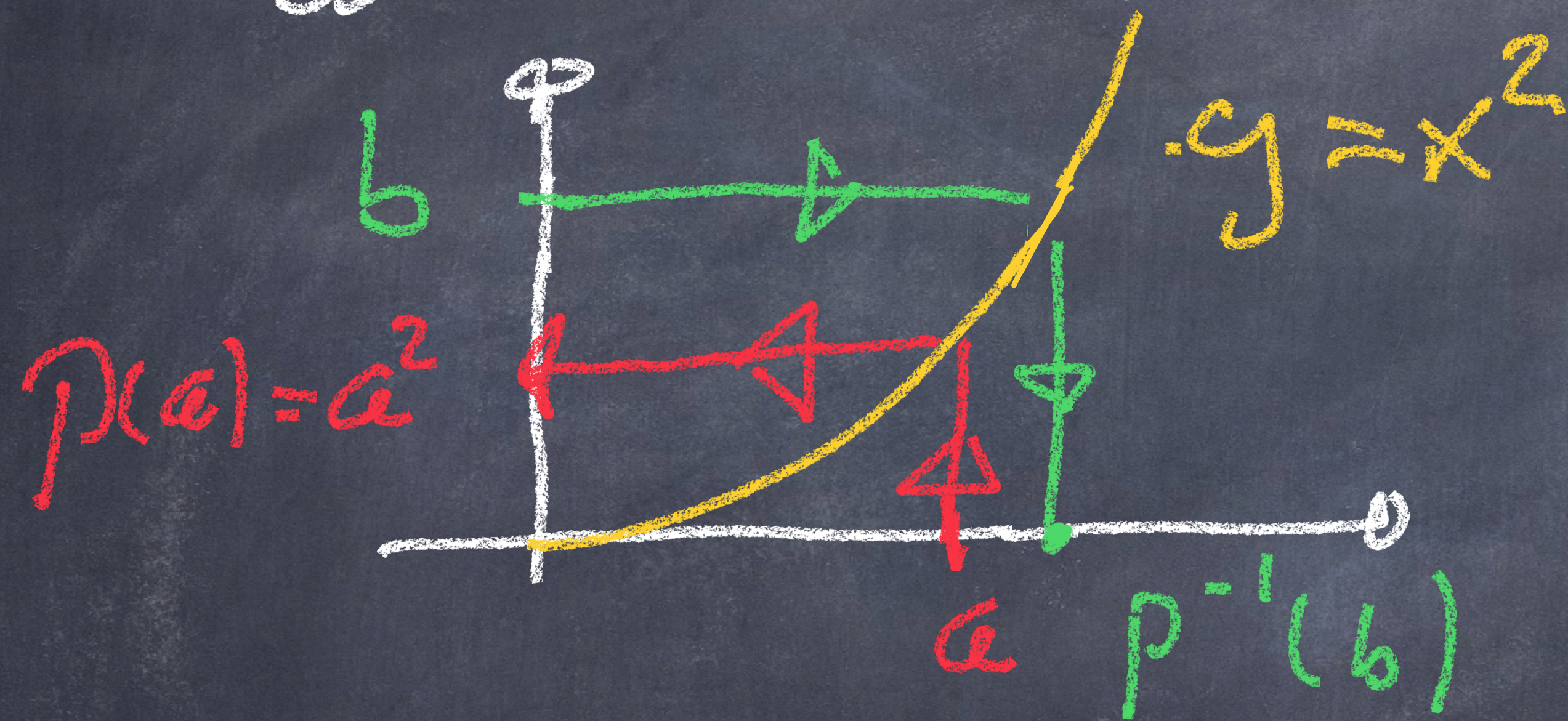
Kontroll: $f(x) = 2x - 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

$$f(f^{-1}(x)) = 2(f^{-1}(x)) - 1 =$$

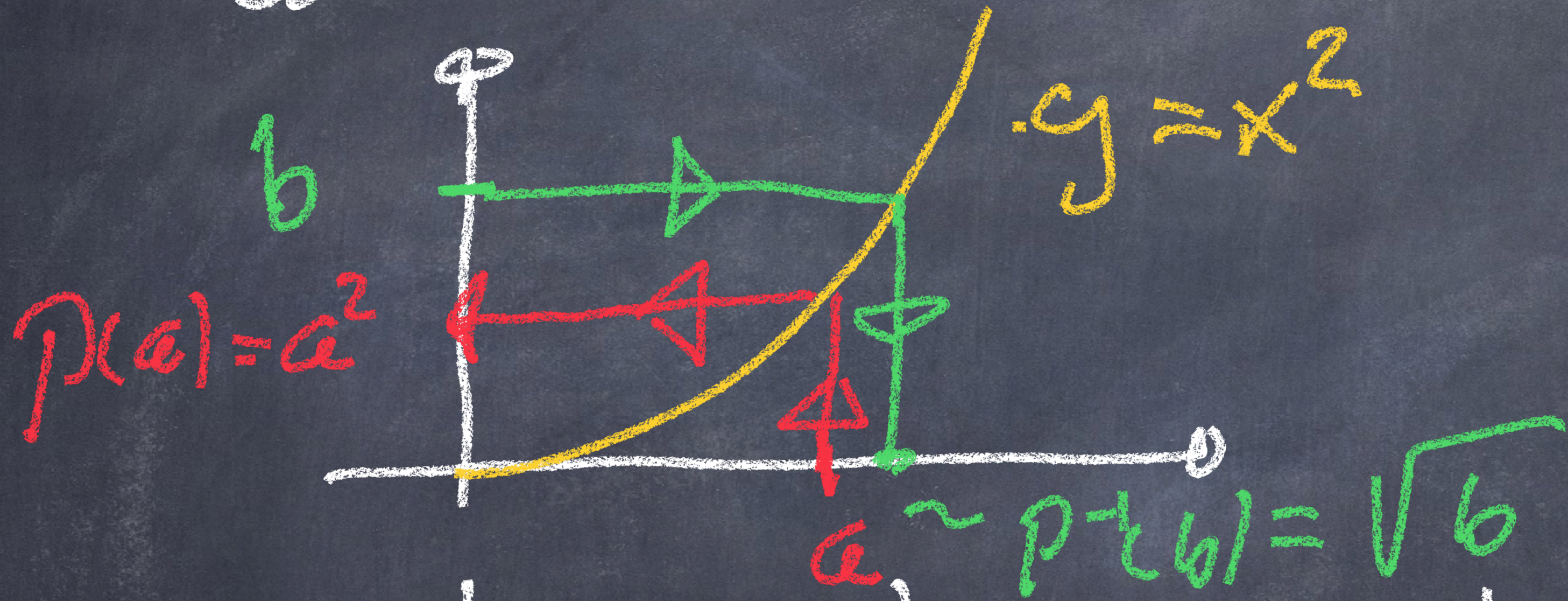
$$= 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 1 = x+1-1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Ex. $p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $p(x) = x^2$
an bijektion, das invertierbar.



Ex. $p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $p(x) = x^2$
 an en bijektion, dus inverteerbaar.



$$p^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad p^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$p(p^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad \text{om } x \geq 0$$

$$p^{-1}(p(x)) = \sqrt{x^2} = x, \quad \text{om } x \geq 0$$

OBS 1. $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$g(x) = x^2$ ej inverterbar



OBS 2: $r(x) = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$r(x) = x^2$ ej inverterbar



Obs 3:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \text{f\"or alla } x \geq 0.$$

(v.l. ej def. f\"or $x < 0$)

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{alla } x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{endast f\"or alla } x \geq 0$$

En funktion f sägs vara

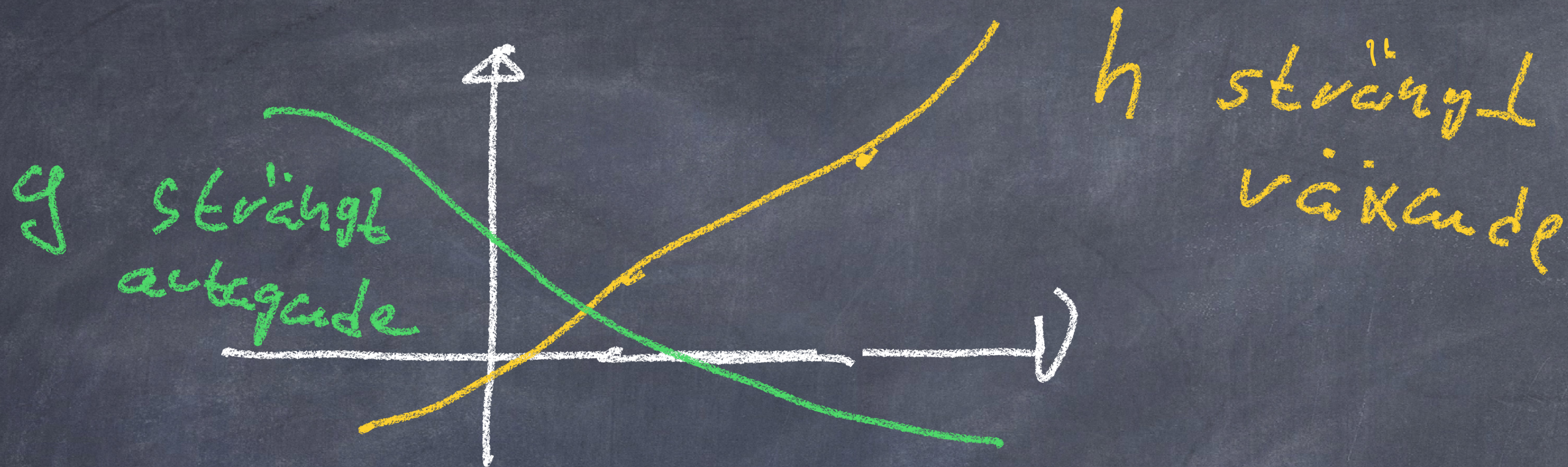
- strängt växande om

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad x_1, x_2 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$$

- strängt avtagande om

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad x_1, x_2 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$$

- strängt monoton om f är antingen strängt växande eller avtagande



SATS: f strängt monoton

$\Rightarrow$ f injektiv.

En alternativ
def. av en funktion
↓
(se lärobok och
extramaterial)
↓

Om S och T är mängder definieras
den kartesiska produkten $S \times T$ som

$$S \times T = \{(s, t) : s \in S, t \in T\}$$

Exempel:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

= "xy-plane"

Alternativ def. av funktion:

En funktion $f = S \rightarrow T$
är en delmängd av $S \times T$, $f \subseteq S \times T$,
sådan att

- för varje $x \in S$ finns
precis ett element $(x, f(x)) \in f$.

$$S = \{a, b, c\}$$

$$T = \{x, y, z, u\}$$

$$S \times T = \{ (a, x), (a, y), (a, z), (a, u), \\ (b, x), (b, y), (b, z), (b, u), \\ (c, x), (c, y), (c, z), (c, u) \}$$

$$f \subseteq S \times T \quad f = \{ (a, y), (b, x), (c, u) \}$$

T
u

(a,u) (b,u) (c,u)

(a,z) (b,z) (c,z)

y

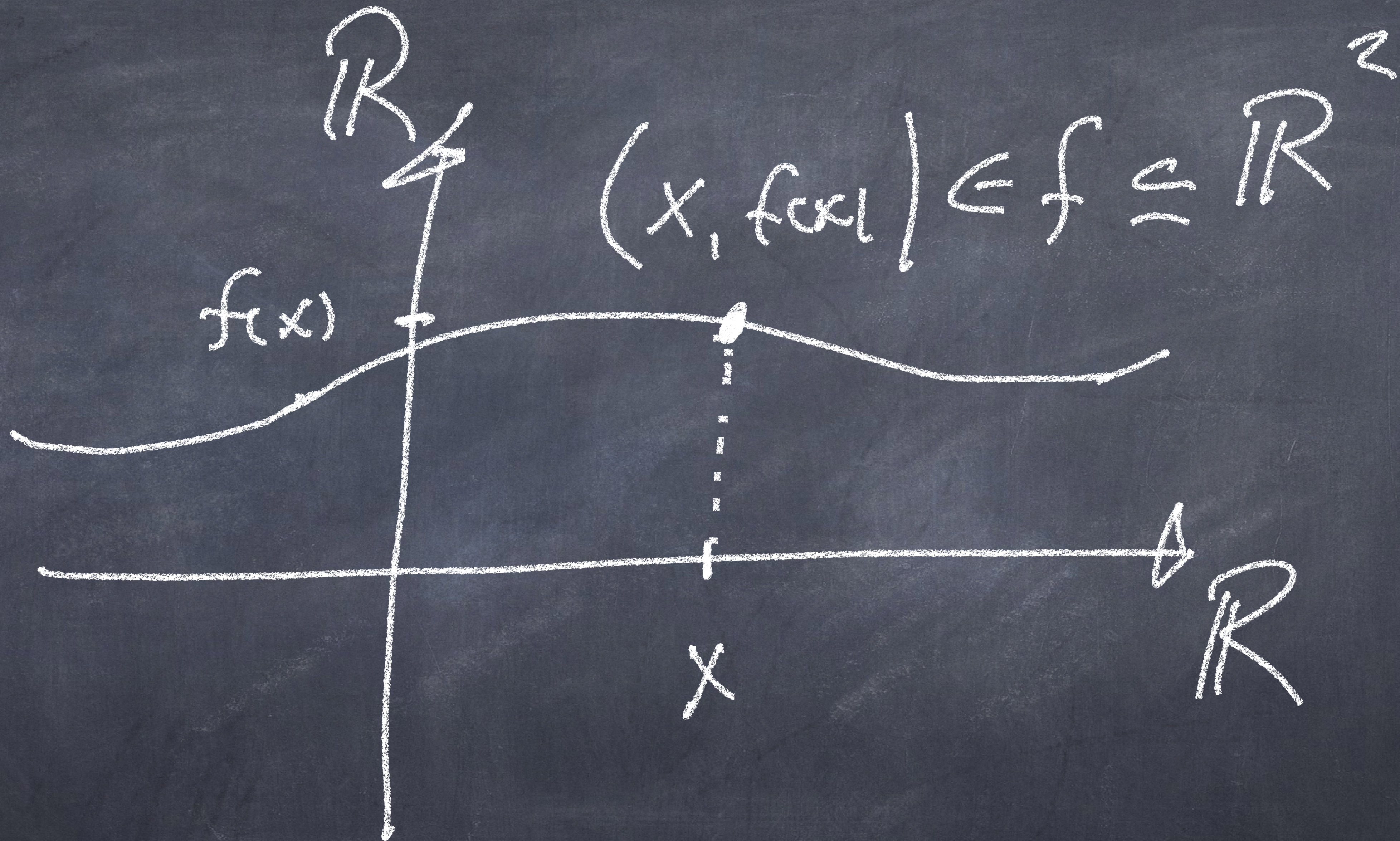
(a,y) (b,y) (c,y)

x

(a,x) (b,x) (c,x)

$$f \subseteq S \times T$$

$$S = \{a, b, c\}$$

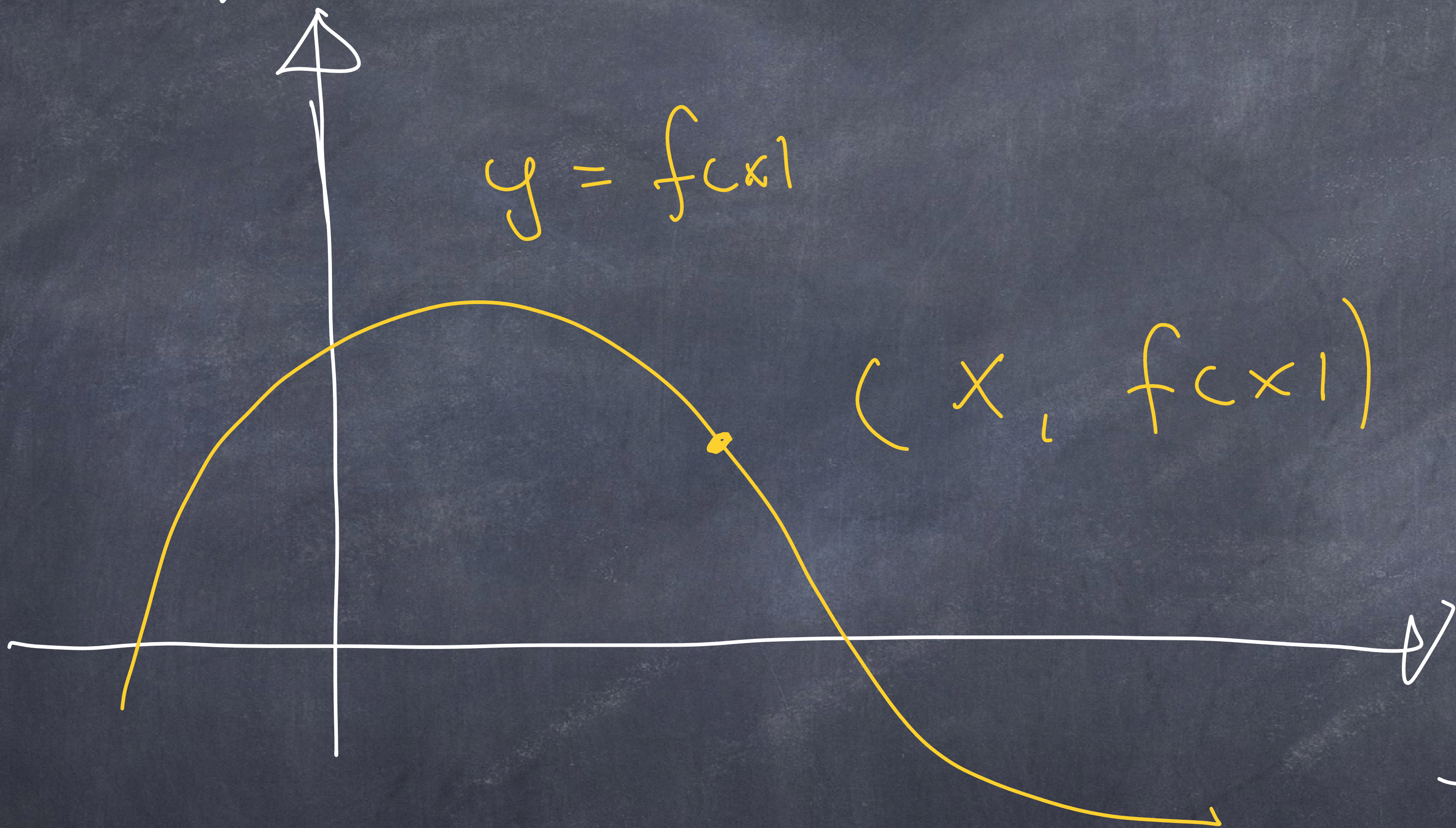


$$Y = \mathbb{R}$$

$$\overline{X} \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$y = f(x)$$

$$(x, f(x))$$



$$f \subseteq \mathbb{R}^2$$