

# Seminarium 4

## SF1661

Lars Filipsson

Institutionen för matematik  
KTH

# Uppgift 1

Bestäm koefficienten framför termen  $a^5b^2$  i utvecklingen av

$$\left(a + \frac{b}{3}\right)^7$$

Lösning: Med binomialformeln får vi att

$$\left(a + \frac{b}{3}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} a^{7-k} \left(\frac{b}{3}\right)^k$$

Den sökta termen erhålls för  $k=2$

$$\text{och är } \binom{7}{2} a^5 \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} a^5 \frac{b^2}{9} = \frac{7}{3} a^5 b^2.$$

Koefficienten är  $\frac{7}{3}$ . Svar:  $7/3$

# Uppgift 1

Fun fact 1. Varför är  $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$

antalet sätt att välja 2 element ur  
en mängd med 7 element?

Givet en mängd med 7 element så finns  
7 sätt att välja ett första element och  
sedan 6 sätt att välja ett andra. Men  
ordningen spelar ingen roll så varje val  
av två element finns nu med 2 ggr.  
Svaret blir alltså  $7 \cdot 6 / 2 = 21$ .

# Uppgift 1

Fun fact 2 : Att spela lotto går ut på att välja 7 tal av 35. Ett <sup>sin</sup> val av 7 tal är en lottorad. Vid dragningen är det en rad som är korrekt. Antalet möjliga rader är  $\binom{35}{7}$  ( $\approx 6,7$  miljoner). Sannolikheten att vinna högsta vinsten är  $\frac{1}{\binom{35}{7}}$ . Sannolikheten för 6 rätt är  $\frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{28}{1}}{\binom{35}{7}}$ . Sannolikheten för minst 6 rätt är  $\frac{1}{\binom{35}{7}} + \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{28}{1}}{\binom{35}{7}}$ .

# Uppgift 2

2c. Använd sambandet  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$  (\*)

för att bevisa att  $\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k-2} + 2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Av (\*) följer att  $\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}$

och att  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ . Så vi får:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

vilket var vad skulle bevisa.

# Uppgift 2

Fun fact 3. Vi kan beräcna (\*) med  
bråkräkning:  $HL = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =$

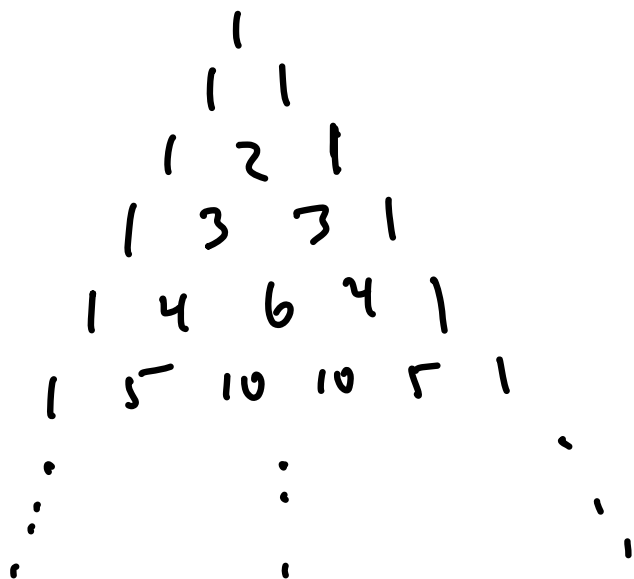
$$= \frac{n!}{(n-k+1)! (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! k!} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sätter på} \\ \text{m g n} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{n! k + n! (n-k+1)}{(n-k+1)! k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)! k!}$$

$$= \binom{n+1}{k} = VL.$$

# Uppgift 2

Funktion 4. (\*) är beviset för att  
Pascals triangel fungerar, dvs för att



är en tabell  
över  
binomialkoefficienterna.

# Uppgift 2

# Uppgift 3

Bevisa formeln för en geometrisk summa med hjälp av induktion. Låt  $a$  vara ett reellt tal  $\neq 1$ .

Vi ska visa med induktion att formeln

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (G.S.)$$

är sann för alla icke-negativa heltal  $n$ .

Bers: Bassteget. Om  $n=0$  säger formeln att  $\sum_{k=0}^0 a^k = \frac{1-a^1}{1-a}$  vilket

är sant, ty  $v_2 = 1$  och  $HL = 1$ .

(G.S) är alltså sann för  $n=0$ .

# Uppgift 3

Induktionssteget. Vi ska visa att om (GS) är sann för  $n=p$  där  $p$  är något icke-negativt heltal så måste också (GS) vara sann för  $n=p+1$ .

Antag att (GS) sann för  $n=p$ , dvs

$$\text{att } \sum_{k=0}^p a^k = \frac{1-a^{p+1}}{1-a}. \quad \text{Då följer att}$$

$$\sum_{k=0}^{p+1} a^k = \left( \sum_{k=0}^p a^k \right) + a^{p+1} = \frac{1-a^{p+1}}{1-a} + \frac{a^{p+1}(1-a)}{1-a} =$$

$$= \frac{1-a^{p+2}}{1-a} \quad \text{dvs} \quad \sum_{k=0}^{p+1} a^k = \frac{1-a^{p+2}}{1-a}.$$

## Uppgift 3

Vi har alltså visat att om  $(GS)$  är sann för  $n=p$  så är  $(GS)$  sann för  $n=p+1$ .

Slutats: Det följer av induktionsprincipen att  $(GS)$  är sann för alla icke-negativa heltal  $n$ .

# Uppgift 3

# Uppgift 5

Lös ekvationen  $\sin 2x = \sqrt{3} \cos x$ .

Vi använder formeln för sinus av dubbla vinklar  
och får:

$$\sin 2x = \sqrt{3} \cos x \quad (\Rightarrow) \quad 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos x$$

$$(\Rightarrow) \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \quad (\Rightarrow)$$

$$\cos x = 0 \quad \text{eller} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\Rightarrow)$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \quad \text{eller} \quad x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi$$

der  $n$  är godt. heltal.

# Uppgift 5

# Uppgift 5

# Uppgift 5











