

① Med hjälp av Binomial satsen
kan vi utveckla $(a + \frac{b}{3})^7$,

$$(a + \frac{b}{3})^7 = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} a^{7-k} \left(\frac{b}{3}\right)^k.$$

Den term som innehåller $a^5 b^2$
fås när $k=2$ i summan i höger led,

$$\binom{7}{2} a^{7-2} \left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$= \frac{7!}{5!2!} \cdot \frac{1}{3^2} a^5 b^2$$

$$= \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3^2} a^5 b^2 = \frac{7}{3} a^5 b^2$$

Sökt koefficient är alltså $\frac{7}{3}$.

2. Vi har formeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (*)$$

a) Vi exemplifierar sambandet
med fallet $n=4$ och $k=3$.
Vi får då

$$V.L. = \binom{4+1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

och

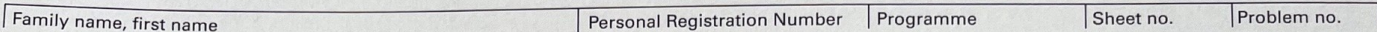
$$H.L. = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!} = 4 + \frac{4 \cdot 3}{2} \\ = 4 + 6 = 10 = V.L.$$

(b) Binomialkoefficienter $\binom{p}{q}$

är definierade då p, q är heltal
sådana att $0 \leq q \leq p$.

För att det ska vara uppfyllt
för alla tre binomialkoefficienterna
(*) , måste vi välja

$$k \geq 1 \text{ och } n \geq k, \text{ dvs } 1 \leq k \leq n.$$



V.S. B.

③ Vi ska visa att

$$1 + r + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad (P(n))$$

för alla $n \in \mathbb{N}$, $r \neq 1$.

(Av detta följer sedan genom ledvis multiplikation med a_0 att också

$$a_0 + a_0 r + \dots + a_0 r^{n-1} = a_0 \frac{1-r^n}{1-r}.)$$

Induktionsbas: För $n=1$ får vi

$$V.L. = 1 \quad \text{och} \quad H.L. = \frac{1-r^1}{1-r} = 1 = V.L.$$

så $P(1)$ är sant.

Induktionsantagande Antag nu att $P(k)$

är sant för något tal $k \in \mathbb{N}$, dvs anta att

$$1 + r + \dots + r^{k-1} = \frac{1-r^k}{1-r}.$$

Induktionssteg I så fall gäller för fallet $n=k+1$ att

$$V.L. = 1 + r + \dots + r^{k-1} + r^k$$

$$= (1 + r + \dots + r^{k-1}) + r^k$$

$$\stackrel{\text{enligt}}{\text{induktions-}} \frac{1-r^k}{1-r} + r^k = \frac{1-r^k + r^k(1-r)}{(1-r)} =$$

$$= \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = H.L.$$

Kar ~~vi~~ ~~visat~~

(3)(2)

$\forall n$ har visat, att

$\left\{ \begin{array}{l} P(1) \text{ sant} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$

Alltså är $P(n)$ sant $\forall n \in \mathbb{N}$
enligt induktionsprincipen.

④ (a) Är det sant att

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}, \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi undersöker först formeln genom att pröva med några olika värden på x , och finner att formeln håller för alla värden vi prövar med. Vi försöker därför visa att den gäller för alla x , $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.

$$\begin{aligned} \text{H.L.} &= \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \\ &= \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1 + (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x = \text{V.L.} \end{aligned}$$

Vi drar slutsatsen att formeln är sann för alla x där uttrycket är definierade.

I härledningen använde vi dubbla-vinkels formeln $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ och "trigonometriska enheten".

④ b) Är det sant att

$$\tan^4 x = 2 \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Även här undersöker vi först formeln med prövning.

$x = 0$ ger:

$$\text{V.L.} = (\tan 0)^4 = 0^4 = 0$$

$$\text{H.L.} = 2 \frac{1 + (\cos 0)^2}{1 - (\sin 0)^2} = 2 \frac{1 + 1}{1 - 0} = 4 \neq \text{V.L.}$$

~~Redan här kan vi svara NEJ~~

Redan här kan vi svara NEJ på frågan!

Formeln är inte sann för alla $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$.

5.

Vill vi lösa ekvationen

$$\sin 2x = \sqrt{3} \cos x.$$

Först använder vi att $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ för att få den ekvivalenta ekvationen.

$$2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos x,$$

$$\cancel{2} \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\cancel{2} \cos x \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\cancel{2} \cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

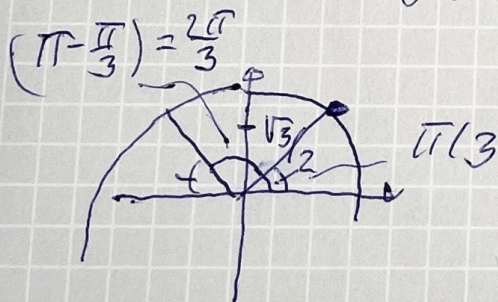
och

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

eller

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$n \in \mathbb{Z}.$



Alltså är ekvation uppfylld om

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,$$

(6.) Cirkeln C har medelpunkt

(a) $M = (1, -2)$ och passerar igenom punkten $P = (-3, 4)$. Det innebär att C s radius r ges av avståndet mellan P och M , dvs

$$r = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}.$$

Alltså beskrivs C av ekvationen

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 52.$$

(b) För att undersöka hur punkten $Q = (3, 5)$ ligger i förhållande till cirkeln beräknar vi avståndet d från M till Q ,

$$d = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}.$$

Eftersom avståndet d är större än radien r , ligger punkten $Q = (3, 5)$ utanför cirkeln.
