Lösningsförslag till
Uppgift 3, Inlämningsuppgift 3

Det finns flera olika vägar att gå för att lösa denna uppgift. Alla har den svårigheten att man får flera olika olikheter att ta hänsyn till, och man måste skilja på när två olikheter ska vara uppfyllda båda två, $f(x)<0$ OCH $g(x)<0$, och när det är tillräckligt att en av dem är uppfylld, $f(x)<0$ ELLER $g(x)<0$.

Här följer tre metoder, varav metod III är kortast men kanske också mindre generell.

Metod I:

$$|x^2-4x-4|<1 \qquad \left(|t|<a \iff -a<t<a \right)$$

$$\iff -1<x^2-4x-4<1$$

$$\iff \begin{cases} x^2-4x-4<1 \\ x^2-4x-4>-1, \end{cases}$$

två olikheter som båda ska vara uppfyllda.

Vi får det ekvivalenta systemet av olikheter

$$\begin{cases} x^2-4x-5<0 & (i) \\ x^2-4x-3>0 & (ii) \end{cases}$$

Metod (I), sid 2.

Vi löser dessa varför sig genom faktorisering och teckenstudium.

* $x^2-4x-5=0 \iff x=2\pm\sqrt{4+5}=-1 \vee 5$

så $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

och den första olikheten (i) kan skrivas

$$(x+1)(x-5)<0.$$

Vi gör teckentabell

		-1		5		x
$(x+1)$	$-\,-$	0	$+\,+\,+\,+$	$+$	$+$	
$(x-5)$	$-\,-$	$-$	$-\,-\,-$	0	$+\,+$	
$(x+1)(x-5)$	$+\,+$	0	$-\,-\,-$	0	$+\,+$	

och alltså är (i) uppfylld omm $-1<x<5$

(om $x\in L_{(i)}=(-1,5)$)

* $x^2-4x-3=0 \iff x=2\pm\sqrt{4+3}=2\pm\sqrt{7}$

så olikhet (ii) är ekvivalent med

$$(x-(2-\sqrt{7}))(x-(2+\sqrt{7}))>0,$$

och teckentabellen

		$(2-\sqrt{7})$		$(2+\sqrt{7})$		x
$(x-(2-\sqrt{7}))$	$-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$	$+$	$+\,+\,+$	
$(x-(2+\sqrt{7}))$	$-$	$-$	$-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+$	
$(x-(2-\sqrt{7}))(x-(2+\sqrt{7}))$	$+\,+$	0	$-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+$	

visar att (ii) är uppfylld OMM $x<(2-\sqrt{7})$

ELLER $x>(2+\sqrt{7})$

Metod (I) sid 3)

, det vill säga, (ii) är uppfyllt om

$$x \in L_{(ii)} = (-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, \infty)$$

Bägge olikheterna (i) och (ii) är uppfyllda precis när x tillhör både $L_{(i)}$ och $L_{(ii)}$, dvs när

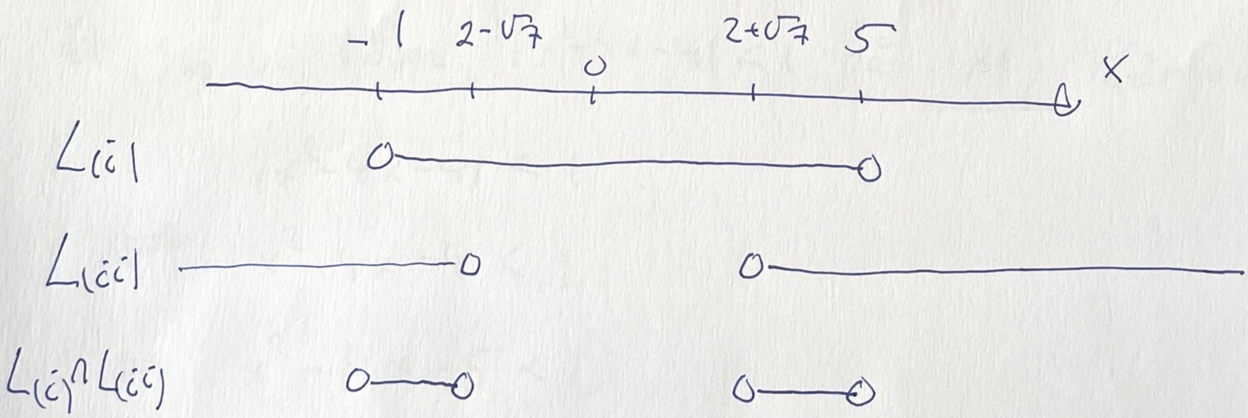
$$x \in L_{(i)} \cap L_{(ii)} = (-1, 5) \cap \left((-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, \infty) \right)$$

Till sist observerar vi att

$$-1 < 2-\sqrt{7} < 2+\sqrt{7} < 5$$

så

$$L_{(i)} \cap L_{(ii)} = (-1, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, 5)$$



SVAR: $-1 < x < 2-\sqrt{7}$ ELLER $2+\sqrt{7} < x < 5$.

Metod II: Denna metod bygger på att använda definitionen $|t| = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$

för att ersätta olikheten $|x^2-4x-4| < 1$ med olikheter utan absolutbeloppstecken, genom att begränsa lösningen till olika delar av x-axeln.

Uttrycket $x^2-4x-4 = (x-2)^2 - 8$

så $x^2-4x-4=0 \iff x = 2 \pm \sqrt{8}$, (kan även fås med pq-formeln)

och faktorsatsen ger

$$x^2-4x-4 = (x-(2-\sqrt{8}))(x-(2+\sqrt{8})).$$

Antag nu att $x^2-4x-4 \geq 0$. Enligt faktoriseringen är det ekvivalent med att

$x \leq (2-\sqrt{8})$ ELLER $x \geq (2+\sqrt{8})$ dvs

$x \in M_1 = (-\infty, 2-\sqrt{8}] \cup [2+\sqrt{8}, \infty)$.

Om vi löser $|x^2-4x-4| < 1$ på M_1 får vi

$$|x^2-4x-4| < 1$$

$$\iff x^2-4x-4 < 1$$

$$\iff x^2-4x-5 < 0$$

$$\iff -1 < x < 5$$ (Se räkningar i Metod I)

Metod II (forts)(blad 2)

Lösningen på delmängden M_1 av $\mathbb{R}$ är de x som dels tillhör M_1 och som dessutom löser olikheten $x^2-4x-4<1$, dvs

$$x \in M_1 \cap (-1, 5)$$

$$= (-\infty, 2-\sqrt{8}] \cup [2+\sqrt{8}, \infty) \cap (-1, 5)$$

Eftersom $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1.41\ldots \approx 2.82$

är $-1 < 2-\sqrt{8} \leq 2+\sqrt{8} < 5$ och

vi får lösningsmängden

$$x \in L_1 = (-1, 2-\sqrt{8}] \cup [2+\sqrt{8}, 5)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nu antar vi istället att

$x^2-4x-4 < 0$, som är detsamma som att anta att $x \in M_2 = (2-\sqrt{8}, 2+\sqrt{8})$ (se ovan).

På detta intervall M_2 gäller att

$$|x^2-4x-4| < 1 \iff -(x^2-4x-4) < 1$$

$$\iff x^2-4x-4 > -1 \iff x^2-4x-4 > 3$$

som (se räkningen i Metod I) är ekvivalent med att $x < (2-\sqrt{7})$ ELLER $x > (2+\sqrt{7})$

dvs att $x \in (-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, \infty)$

Metod (II) (blad 3).

Så de lösningar till $|x^2-4x-4|<1$ som ligger i intervallet $M_2=(2-\sqrt{8}, 2+\sqrt{8})$ är

$$x \in M_2 \cap \left((-\infty, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, \infty)\right)$$

$$= (2-\sqrt{8}, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, 2+\sqrt{8}) = L_2$$

Vi har nu löst $|x^2-4x-4|<1$

- först på den del av talaxeln där $x^2-4x-4 \geq 0$ och hittat lösningar

$$L_1 = (-1, 2-\sqrt{8}] \cup [2+\sqrt{8}, 5)$$

- sen på den del av talaxeln där $x^2-4x-4<0$ och hittat lösningar

$$L_2 = (2-\sqrt{8}, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, 2+\sqrt{8})$$

Sammantaget utgörs lösningsmängden av de x som ligger i L_1 ELLER L_2

dvs

$$x \in L_1 \cup L_2 = (-1, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, 5)$$

Metod III Eftersom $|t| < a \Leftrightarrow -a < t < a$ är

$$|x^2 - 4x - 4| < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 - 4x - 4 < 1$$

Vi kvadratkompletteran 2:a gradsuttrycket och får

$$-1 < (x-2)^2 - 8 < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad +7 < (x-2)^2 < +9.$$

Vidare gäller att

$$a < y^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < y < -\sqrt{a} \text{ ELLER } \sqrt{a} < y < \sqrt{b}$$

om $a, b > 0$

så vi får den ekvivalenta olikheterna

$$-3 < x-2 < -\sqrt{7} \quad \text{ELLER} \quad \sqrt{7} < x-2 < 3$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-1 < x < 2-\sqrt{7} \quad \text{ELLER} \quad 2+\sqrt{7} < x < 5$$

SVAR: $x \in (-1, 2-\sqrt{7}) \cup (2+\sqrt{7}, 5)$