

Seminarium 3

SF1661

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Uppgift 1

a) Skriv $\frac{2}{11}$ på decimalform.

b) Är $r = 1.232323 \dots$ ett rationellt tal? Skriv det i sådana fall som en kvot av två heltal.

$$\begin{array}{r} 0,18 \\ 11 \overline{) 2,00} \\ \underline{-0} \\ 20 \\ \underline{-11} \\ 90 \\ \underline{88} \\ 2 \end{array}$$

Eftersom resten 2 återkommer

så måste
upplösa

hele processen
så sommet sätts
som första gången
2:an kommer som rest.
när blir för vi att

$$\hookrightarrow \frac{2}{11} = 0,181818 \dots$$

Uppgift 1

b, Men $r = 1,23232323 \dots$

så är $100r = 123,232323 \dots$

och $100r - r = 99r = 122$

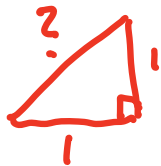
så $r = \frac{122}{99}$.

Uppgift 1

Filosofi: reella tal - "alla decimaltal"

1a: Alla rationella tal har periodiska decimalutvecklingar

1b: Alla periodiska decimalutvecklingar är rationella tal.



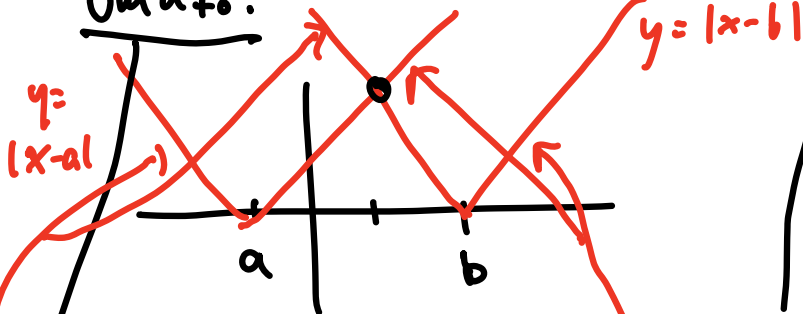
Samt: ett Reellt tal r är rationellt
 $(\Leftrightarrow)$ r har periodisk decimalutv.

supremumegenskapen för $\mathbb{R}$: varje icke-tom begränsad mängd av reella tal har en minsta övre gräns.

Uppgift 2

Hur många lösningar har ekvationen $|x - a| = |x - b|$ där a och b är reella konstanter?

Om $a \neq b$.



En.

Kan anta $b > a$.

Kriv och så argument för att de inte
skär varandra lågt säga, det är
samma riktn. koeff. de parallella linjer

Om $a = b$ så får vi
ekv. $|x - a| = |x - a|$
som är uppfyllt för alla x .
Så ∞ lön. i detta fall.

Uppgift 2

Att 1: Om $a = b$ så är

$$|x-a| = |x-b| \Leftrightarrow |x-a| = |x-a|$$

som stämmer för alla x . ∞ många lösningar.

Om $a \neq b$, så kan vi anta att $b > a$.

För $x > b$ är $|x-a| = |x-b| \Leftrightarrow x-a = x-b$

$\Leftrightarrow -a = -b \Leftrightarrow a = b$ men $a \neq b$ så inga
 x är lösningar i detta fall.

För $x < a$ p.s.s. inga x lösningar.

För $a < x < b$: $|x-a| = |x-b| \Leftrightarrow x-a = -(x-b)$

$\Leftrightarrow 2x = a+b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$. En lösning.

SVAR: Om $a = b$ finns ∞ många lösningar. Om $a \neq b$ finns exakt en lösning. ||

Uppgift 2

Uppgift 2

Uppgift 3

Bestäm alla x sådana att $|x^2 - 4x - 4| < 1$.

vi har $|t| < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 1$ Det

betyder: $|x^2 - 4x - 4| < 1 \Leftrightarrow$

$-1 < x^2 - 4x - 4 < 1$. Vi ska hitta

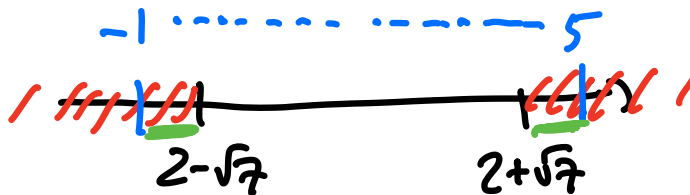
alla x som löser båda olikheterna:

① $-1 < x^2 - 4x - 4$ och $x^2 - 4x - 4 < 1$ ②
pq + faktoris.

① $\Leftrightarrow 0 < x^2 - 4x - 3 \Leftrightarrow 0 < (x - 2 - \sqrt{7})(x - 2 + \sqrt{7})$
 $\Leftrightarrow \underline{x > 2 + \sqrt{7}}$ el. $\underline{x < 2 - \sqrt{7}}$.

Uppgift 3

① Figur



② $x^2 - 4x - 5 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Leftrightarrow \underline{-1 < x < 5}$
PS + faktori.

Både ① och ② måste uppfyllas

så vi får: $-1 < x < 2 - \sqrt{7}$ eller
 $2 + \sqrt{7} < x < 5$ //

Svar: $-1 < x < 2 - \sqrt{7}$ eller
 $2 + \sqrt{7} < x < 5$

Uppgift 3

①

$$|x-a| = x-a$$

om $x-a \geq 0$

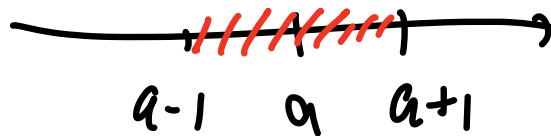
annars:

$$|x-a| = -(x-a).$$

②

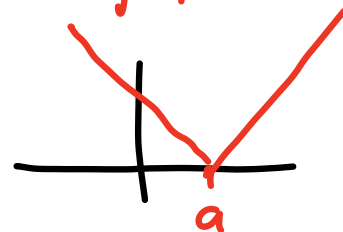
$$|t-a| < 1$$

av st mellan
 t och a



③

$$y = |x-a|$$



Uppgift 3

Uppgift 4

Skriv summan $1 + 4 + 7 + \dots + 97 + 100$ med hjälp av summasymbolen. Beräkna också summan.

Aritmetisk serie skillnaden mellan 2 pi varann följande termer är 3.

$$S = (1+3 \cdot 0) + (1+3 \cdot 1) + (1+3 \cdot 2) + \dots + (1+3 \cdot 33)$$

Vi kan skriva:

$$S = \sum_{k=0}^{33} (1+3 \cdot k)$$

$$S = \sum_{k=1}^{34} (3k-2)$$

$$2S = \begin{array}{r} 1 + 4 + 7 + \dots + 100 \\ + 100 + 97 + \dots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \end{array}$$

Uppgift 4

$$25 \approx 34 \cdot 101 = 34 \cdot (1 + 100)$$

Vi har $S = 34 \cdot \frac{1 + 100}{2} =$ antal tester
ggⁿ
medelvärdes
du försöker och
söka igen.

$$= 17 \cdot 101$$
$$= 1717$$

Uppgift 4

Uppgift 4

Uppgift 5

Låt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k}$. Beräkna S_n .

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

Bestäm sedan det minsta tal L sådant att $S_n < L$ för alla $n \geq 1$

Geometrisk serie. Kvoten mellan 2 på varandra följande termer är $\frac{1}{3}$.

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} =$$

Uppgift 5

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

Effekt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$

och $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2}$ för alla n

så är $L = \frac{1}{2}$. (supremum, vilket är gräns.)

Uppgift 5

Uppgift 5

Uppgift 6

Talföljden a_n , $n \geq 1$, ges av att $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = 2a_n + 1$ för $n \geq 1$. Finn en formel för a_n som funktion av n och bevisa med induktion att din formel är korrekt.

$$a_n = 2^n - 1 \quad \text{för } n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Bevis med induktion.

BAS-STEG
① ska visa att formeln är sann för $n=1$
Koll: $a_1 = 1$ och $2^1 - 1 = 1$
så formeln är sann för $n=1$.

IND. STEG
②. ska visa att OM formeln är sann för ett tal $n=p$ SÅ måste formeln vara sann för $n=p+1$.

Uppgift 6

Anta att formeln är sann för $n=p$.

$$a_p = 2^p - 1. \quad \text{Då är}$$

$$a_{p+1} = 2a_p + 1 = 2(2^p - 1) + 1$$

$$= 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$$

dvs

$$a_{p+1} = 2^{p+1} - 1. \quad \text{Dvs: har visat}$$

om formeln är sann för $n=p$ så är

formeln sann för $n=p+1$.

Uppgift 6

3

Nu blir en induction att
formeln $a_n = 2^n - 1$ är sann
för alla $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Uppgift 6

