Föreläsning 8

SF1661 HT21

22/9 -20

- Mer om Induktionsbevis

- Binomialsatsen

och

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Bevisa m. induktion att

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$

dvs att

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{})^2$$

OBS: $= \dfrac{n(n+1)}{2}$

Låt $P(n)$ vara påståendet

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$$

Vi

(I) bevisa först att $P(1)$ sann

(II) bevisar sedan implikationen

$$P(k) \Longrightarrow P(k+1), \quad k \in \mathbb{N}$$

Enligt Induktionsprincipen är då $P(n)$ sant för alla $n \in \mathbb{N}$

(I) (Induktionsbas)

$P(1)$ är påståendet

$$\sum_{j=1}^{1} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{1} j\right)^2$$

$V.L. = 1^3 = 1$, $H.L. = (1)^2 = 1$

så $V.L.(n=1) = H.L.(n=1)$ & $P(1)$ sann

II (Induktionsantagande)

Antag att $P(k)$ är sann, k något tal $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

dvs anta
$$\sum_{j=1}^{k} (j)^3 = \left(\sum_{j=1}^{k} j \right)^2 \quad (*)$$

Induktionssteg

(Vi vill nu visa att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

dvs vi vill visa att om (*) gäller,

så är

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \left(\sum_{j=1}^{k+1} j\right)^2$$

$$V.L.(n=k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^{k} j^3 + (k+1)^3 =$$

indh.

$$\underset{(*)}{=} \left(\sum_{j=1}^{k} j\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

aritmetisk

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

så $V.L.(n=k+1) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$

$H.L.(n=k+1) = \left(\sum_{j=1}^{k+1} j\right)^2$

aritmetisk summa $= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = V.L.(n=k+1)$

Vi har visat

(I) $P(1)$ är sant

(II) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$

Enligt INDUKTIONSPRINCIPEN

är då $P(n)$ sant för alla

$n \in \mathbb{N}$

Visa m h a induktion att

$$2^n > n^2 \text{ för alla } n \geq 5$$

· För $n=5$ $\quad 2^5 = 32 > 25 = 5^2$ (Induktionsbas)

- För $n=5$ $\quad 2^5 = 32 > 25 = 5^2$

- Antag nu att $2^k > k^2$ för något $k \geq 5$.

(Induktionsantagande)

· För $n=5$ $\quad 2^5 = 32 > 25 = 5^2$

· Antag nu att $2^k > k^2$ för något $k \geq 5$.

· Då är $2^{k+1} = 2 \cdot \underline{2^k} > 2 \cdot \underline{k^2} \overset{(*)}{>} (k+1)^2$

Enligt induktionsantagandet

Visas nedan

Bevis (*) : • Låt $p(k) = 2k^2 - (k+1)^2$

• Vi vill visa att $p(k) > 0$ för $k \geq 5$

$$p(k) = 2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2x - 1$$

$$= k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2.$$

Detta är ett 2:a grads polynom med nollställen $k = 1 \pm \sqrt{2}$. Från grafen ser vi att $p(k) > 0$ för $k \geq 5$.

Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart med 4 för alla hela tal $n \geq 0$. $(P(n))$

Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart med 4 för alla hela tal $n \geq 0$. ($P(n)$)

Induktionsbas: För $n=0$ gäller $3 \cdot 9^0 + 25^0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, så $P(0)$ sant.

Visa att: $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart med 4 för alla hela tal $n \geq 0$. $(P(n))$

Induktionsbas: För $n = 0$ gäller

$3 \cdot 9^0 + 25^0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, så $P(0)$ sant.

Induktionsantagande: Antag nu att $P(k)$ är sant, d.v.s. antag att

$$3 \cdot 9^k + 25^k = 4m$$

för något $m \in \mathbb{N}$, där $k \geq 0$.

För $n = k+1$ får vi då

$$3 \cdot 9^{k+1} + 25^{k+1} = 9(3 \cdot 9^k) + 25(25^k)$$

$$= 9(3 \cdot 9^k + 25^k) + 16 \cdot 25^k$$

$$\underset{\text{induktionsantagandet}}{\overset{\text{enl}}{=}} 9 \cdot 4m + 16 \cdot 25^k = \underbrace{4\underbrace{(9m + 4 \cdot 25^k)}_{\text{heltal}}}_{\text{delbart m. 4.}}$$

så $P(k+1)$ är sant

om $P(k)$ är sant.

Alltså: om $P(n)$ är påståendet

"4 delar $(3 \cdot 9^n + 25^n)$" så

har vi visat

$$\begin{cases} P(0) \text{ sant} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1), \ k \geq 0 \end{cases}$$

så $P(n)$ sant $\forall \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

enligt induktionsprincipen.

Binomialsatsen

& Pascals triangel

$(x+y)^1 = x + y$ 1 1

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 1 2 1

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 1 3 3 1

$(x+y)^4 =$ ___ ?

?

$\vdots$

$(x+y)^n =$ ___ ?

?

För att formulera detta behöver vi definiera

$n!$ och $\binom{n}{k}$

"Fakultet"

"Binomial-koefficienten"

Fakultet

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Exempel:

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (3!) \cdot 4 = 24$

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Rekursiv formel

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

$n \geq 1$

Binomialkoefficienter

$$\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad n \geq k \geq 0$$

"n över k" "n choose k"

Exempel:

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,(2-0)!} = \frac{2!}{0!\,2!} = \frac{2}{1\cdot 2} = 1$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 2!} = 15$$

Beräkna:

- $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

- $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6\cdot5\cdot\overbrace{\cancel{4}\cdot3\cdot2\cdot1}^{4!}}{\underbrace{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}_{4!}} = 30$

- $\dbinom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!\,1!} = \dfrac{3\cdot\cancel{2\cdot1}}{\cancel{2\cdot1}\cdot1} = 3$

- $\dbinom{4}{0} = \dfrac{4!}{0!\,4!} = 1$

- $\dbinom{4}{1} = \dfrac{4!}{1!\,3!} = \dfrac{4\cdot3!}{3!} = 4$

- $\dbinom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!\cdot2!} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot3\cdot\cancel{2\cdot1}}{\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2\cdot1}} = 6$

- $\dbinom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!\cdot1!} = 4$

- $\dbinom{4}{4} = \dfrac{4!}{4!\cdot0!} = 1$

Binomialsatsen :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \,,\; n \geq 0$$

Exempel:

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^{2-k} y^k =$$

$$= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} x^{3-k} y^k =$$

$$= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+2y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} (2y)^k$$

$$=$$

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k.$$

Bestäm a_5.

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k .$$

Bestäm a_5.

$$p(x) \underset{\text{satsen}}{\overset{\text{Binom.}}{=}} \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{8-k} (-2)^k .$$

Låt $p(x) = (x-2)^8$. $p(x)$ är ett polynom i x och kan skrivas på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{8} a_k x^k.$$

Bestäm a_5.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^{8-k} (-2)^k.$$

$k=3$ ger termen $\binom{8}{3} x^5 (-2)^3 = (-8) \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^5$

$$= -8^2 7 x^5 = -7 \cdot 64 x^5 = \underbrace{-448}_{= a_5} x^5$$

Lemma (Binomialkoefficienternas egenskaper)

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Egenskaper

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$\Rightarrow$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

$$\vdots$$

Bevis $\left(\binom{n}{k}\text{ egenskaper}\right)$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \quad , \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k!)\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n! \cdot k}{k \cdot (k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\cdot k}{k\cdot(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)}$$

$$= \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

Bevis av binomialsatsen

- görs med induktion över n
- principen i induktionen visas nedan i specfallet $n = 2 \Rightarrow n = 3$.
- bygger på egenskaper hos $\binom{n}{k}$ enligt Lemma ovan.

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$= x\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$+ y\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$= x\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$+ y\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$= \binom{2}{0}x^3 + \binom{2}{1}x^2y + \binom{2}{2}xy^2$$

$$+ \binom{2}{0}x^2y + \binom{2}{1}xy^2 + \binom{2}{2}y^3$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$= x\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$+ y\left(\binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2\right)$$

$$= \binom{2}{0}x^3 + \binom{2}{1}x^2y + \binom{2}{2}xy^2$$

$$+ \binom{2}{0}x^2y + \binom{2}{1}xy^2 + \binom{2}{2}y^3$$

$$= \underbrace{\binom{2}{0}}_{=1=\binom{3}{0}}x^3 + \underbrace{\left(\binom{2}{0}+\binom{2}{1}\right)}_{=\binom{3}{1}}x^2y + \underbrace{\left(\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\right)}_{=\binom{3}{2}}xy^2 + \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1=\binom{3}{3}}y^3$$

Bevis för Binomialsatsen

Vi bevisar satsen genom induktion. Vi börjar med att fastställa induktionsbasen för några värden på n. Det skulle dock egentligen räcka med fallet $n = 0$.

Fallet $n = 0$. I detta fall säger satsen att

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

vilket ju stämmer bra.

Fallet $n = 1$. I detta fall säger satsen att

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k \\ &= \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 \\ &= 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b \\ &= a + b,\end{aligned}$$

vilket ju även det stämmer bra.

Vi genomför nu induktionssteget. Därför antar vi att satsen stämmer för $n = m$, nämligen att

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

och visar att detta medför att satsen även stämmer för $n = m + 1$, nämligen att

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k.$$

Vi beräknar:

$$(a+b)^{m+1} = \underbrace{(a+b)(a+b)^m = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k}_{\text{Genom induktionsantagandet}}$$

$$= a \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}$$

Nästa steg är att slå ihop de två summorna. För att göra detta parar vi ihop termer som har samma potenser av a och b. För att matcha termen

Nästa steg är att slå ihop de två summorna. För att göra detta parar vi ihop termer som har samma potenser av a och b. För att matcha termen

$$\binom{m}{k-1} a^{m-(k-1)} b^{(k-1)+1} = \binom{m}{k-1} a^{m-k+1} b^k$$

i den högra summan måste vi ta termen

$$\binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k$$

i den vänstra summan. Termen

$$\binom{m}{0} a^{m-0+1} b^0 = a^{m+1}$$

i den vänstra summan har ingen motsvarighet i den högra summan, och termen

$$\binom{m}{m} a^{m-m} b^{m+1} = b^{m+1}$$

i den högra summan har ingen motsvarighet i den vänstra summan, så vi lyfter ut dessa termer.

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}$$

$$= \binom{m}{0} a^{m-0+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] a^{m-k+1} b^k$$

$$+ \binom{m}{m} a^{m-m} b^{m+1}$$

$$= \binom{m}{0} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k + \binom{m}{m} a^0 b^{m+1}$$

I det sista steget tillämpade vi Lemma 4.2.5. Eftersom

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1 \text{ och } \binom{m+1}{m+1} = \binom{m}{m} = 1$$

kan vi skriva detta som

$$\binom{m+1}{0} a^{m+1} b^0 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k + \binom{m+1}{m+1} a^0 b^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k,$$

vilket skulle bevisas.

1

1 1 2

1 2 1 4

1 3 3 1 8

1 4 6 4 1 16

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1