

KRITISERADE LÖSNINGAR

1.

a)

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{25}}{\frac{2}{75}} \right)^2 \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{25^2}}{\frac{2^2}{75^2}} \right) \right)^2$$

förenkla
inre
parentes
först.
Så blir
det enklare

$$= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{625}}{\frac{4}{5625}} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{625} \cdot \frac{5625}{4} \right) \right)^2$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 1125}{8 \cdot 625} \right)^2 = \left(\frac{1125}{8 \cdot 125} \right)^2 = \left(\frac{225}{8 \cdot 25} \right)^2$$

$$= \left(\frac{9}{8} \right)^2 = \frac{81}{64} \quad R$$

Att multiplicera ihop
gör det bara
krångligare

b) $(8^{1/3})^{-4} \cdot (4^5)^{1/2} = 2^{-4} \cdot (1024)^{1/2}$

$$= \frac{1}{16} \cdot 32 = 2 \quad R \quad \text{OBS: } (4^5)^{1/2} = 4^{5 \cdot 1/2} = (4^{1/2})^5 = 2^5 = 32$$

d) $\left(\frac{a^2b + ab^2}{(a+b)^4} \right) \cdot \frac{ab(a+b)}{1} \cdot \frac{4}{ab(a+b)} = \frac{4ab}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 1$

LÖSNINGSFÖRSLAG

$$\begin{aligned} \text{1. a)} \quad & \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{25}}{\frac{2}{75}} \right)^2 \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{25} \cdot \frac{75}{2} \right)^2 \right)^2 \\ & = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \right)^2 = \left(\frac{9}{8} \right)^2 = \frac{81}{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & (8^{1/3})^{-4} \cdot (4^5)^{1/2} = 2^{-4} \cdot 4^{5 \cdot 1/2} \\ & = 2^{-4} \cdot (4^{1/2})^5 = 2^{-4} \cdot 2^5 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \frac{a^2b + ab^2}{\frac{(a+b)}{4}} = \frac{ab(a+b) \cdot \frac{4}{a+b}}{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{4ab}{a^2b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - 2ab)} = \frac{4ab}{4ab} = 1 \end{aligned}$$

KRITISERADE LÖSNINGAR

2.

$$p(-1) = p(1) = p(2) = p(-2) = p(0) = 0$$

$$p(x) \neq 0, x \notin \{0, 1, -1, 2, -2\}$$

2

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)x = 0$$

ekvation! ej polynom

$$(x^2-1)(x^2-4)x = 0$$

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

2

fler:

Femms

En typ: $g(x) = x^2$

operatör } kan också multiplicera med 2 till exempel

$$b) \quad q(x) = (x+1)^2(x-1)^2$$

a) II Alt. Lösningsförslag (första del)

$$p(-1) = p(1) = p(2) = p(-2) = p(0) = 0$$

$p(x) \neq 0$
annars

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)x$$

Löpande text som

förklarar och kommenterar SAKSAS

LÖSNINGSFÖRSLAG

(2.) Ett polynom p sådant att

$$p(1) = p(-1) = p(2) = p(-2) = p(0) = 0$$

måste enligt Fäktorsatsen ha formen

$$p(x) = x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)q(x),$$

där q är ett polynom.

Om p inte ska ha några andra reella nollställen än $x \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$, kan inte q heller ha några andra reella nollställen än $x \in \{0, 1, -1, 2, -2\}$.

Vi ser också att omvändningen gäller, det vill säga

$$p(1) = p(-1) = p(2) = p(-2) = p(0) = 0, \quad p(x) \neq 0 \text{ för } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, 2, -2\}$$



$$p(x) = x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)q(x) \\ q(x) \neq 0 \text{ för } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1, 2, -2\}.$$

Exempel: $q(x) = k$ (konstant)

$$q(x) = x^2(x-1)$$

$$q(x) = (x^2+1)$$

$$q(x) = 3(x^2-4)(x^4+x^2+10)$$

LÖSNINGSFÖRSLAG

2. Lösningen blir entydig
om vi till exempel kräver att

$$\cdot \text{grad } p = 5$$

$$\cdot \text{Högsta grads koefficienten} = 1$$

$$\text{Dessa tvångar } q(x) = 1$$

$$\text{och } p(x) = x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

~~$q(x)$~~

b) Vi kan välja t.ex

$$q_1(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1),$$

där de två första faktorerna
ger två olika reella nollställen ($x=1$ och $x=-1$)
medan faktorn (x^2+1) saknar reella nollställen.

Vi kan också välja polynom
med multipla nollställen t.ex

$$q_2(x) = (x+1)^2(x-1)^2$$

KRITISERADE LÖSNINGAR

3.

I

Starkt

$$\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x$$

$$x^2+4x-4 = x^3$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2-4) = 0$$

$$x=1, x=2, x=-2$$

Starkt

II

$$\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x$$

$$x^2+4x-4 = x^3$$

$$(x-1)(x^2-4) = 0$$

$$x_1=1 \vee x_2=2 \vee x_3=-2$$

Prövning:

$$x_1=1 \quad \text{V.L.} = \sqrt[3]{1^2+4 \cdot 1-4} = \sqrt[3]{1} = 1 = \text{H.L.}$$

$$x_2=2 \quad \text{H.L.} = \sqrt[3]{2^2+4 \cdot 2-4} = \sqrt[3]{8} = 2 = \text{H.L.}$$

$$x_3=-2 \quad \text{V.L.} = \sqrt[3]{(-2)^2+4(-2)-4} = \sqrt[3]{4-8-4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

(H.L. = -2) FAKT ROT

2 H.L.

Markera

hur de

olika

ekvationerna

utsagorna

"hängen ihop"

Om $\Rightarrow$ anges

här, dos man ej är

säker på att ekvationens

råder, då blir

Prövning Lösart
nödvärdis.

KRITISERA LÖSNING

4. I $(x+1)x^2 + 1 \geq \frac{1}{x+1}$ $(x+1)$ förutsätter att $x+1 > 0$
 $(x^2+1)(x+1) \geq 1$ $\checkmark$ dvs $x \geq -1$

$$x^3 + x^2 + x + 1 \geq 1$$

$$x^3 + x^2 + x \geq 0$$

$$x(x^2 + x + 1) \geq 0$$

val vänster värd.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$pq: x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} < 0$$

$$\text{så } x^2 + x + 1 \neq 0 \text{ alla } x \in \mathbb{R}$$

$$x \frac{(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)} \geq 0$$

Förutsätter $x+1 > 0$

$$x \geq 0$$

Svar: $x \geq 0$

DEL AV LÖSNINGEN SOM ÄR < 0
 SÄGNAS (SOM KONFEKENS AV
 FEL I LÖSNINGSMETOD)

KRITISERAD LÖSNING

4. II $x^2 + 1 \geq \frac{1}{x+1}$ för $x = -1$

$$x^2 + 1 - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 + 1)(x+1) - 1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1 - 1}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} \geq 0 \quad \text{f. 2}$$

Möjliga fall

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, +\infty) \quad x > -1$$

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + x \leq 0 \\ (x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \quad x < -1$$

Text saknas!

Slösats: $x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$

Make v. -4.9.

LÖSNINGSFÖRSLAG

41.

Metod I

Vi ser att olikheten $x^2 + 1 \geq \frac{1}{x+1}$ är definierad för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$x^2 + 1 \geq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1) - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + 1)(x+1) - 1}{(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x + 1 - 1}{(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2 + x + 1)}{x+1} \geq 0$$

Eftersom $(x^2 + x + 1) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 påverkar den faktorn inte tecknet på v.l. och
 den sista olikheten är därför $\Leftrightarrow$ samma
 ekvivalent med olikheten

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

som vi löser med tecken tabell.

-1	0	
x	- - - - 0	+
(x+1)	- - 0	+
$\frac{x}{x+1}$	+	+

$$\text{Svare: } x^2 + 1 \geq \frac{1}{x+1}$$

OMM

$$x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$

ALTERNATIV LÖSNINGSFÖRSLAG

4. Vi gör en falluppdelning, dvs vi löser olikheten dels på intervallet $x < -1$, och dels på intervallet $x > -1$.

Antag först att $x < -1$. Då är $x+1 < 0$ och vi har att

$$x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \quad \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) \leq \frac{1}{x+1} \quad \text{(eftersom } x+1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2+x+1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow x^3+x^2+x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2+x+1) \leq 0$$

Eftersom $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x$ är den sista olikheten ekvivalent med att

$$x \leq 0$$

Antag ~~Antag~~ att $x > -1$.

På intervallet $x < -1$ är olikheten uppfylld om $x \leq 0$, vilket gäller alla x på intervallet $x < -1$.

Antag nu att $x > -1$. Då är $x+1 > 0$

och vi har att

$$x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \quad \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) \geq 1 \quad \text{(eftersom } x+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{samma räkningar som ovan} \quad \Leftrightarrow x \geq 0$$

På intervallet $x > -1$ är alltså olikheten uppfylld om $x \geq 0$, dvs denna del av lösningsmängden ges av $x \geq 0$.

$$\text{Svar: } x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$$