Seminarium 2

SF1661

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

Uppgift 1

Allmänna tips:

- Förenkla det innersta först
- Avstå från att multiplicera ihop
- Avstå från att utveckla kvadrater
- Behåll faktoriseringar, bryt ut faktorer snarare än gångra in

Uppgift 1

Några nedslag:

- $\left(\frac{1/25}{2/75}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{25}}{\frac{2}{75}}\right)^2 = \left(\frac{75}{25\cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
- $\left(4^5\right)^{1/2} = 4^{5\cdot\frac{1}{2}} = \left(4^{1/2}\right)^5 = 2^5 = 32$
- $\underline{a^2b + ab^2} = \underline{ab(a+b)}$

Uppgift 2 a

$x^2-1 = 3$

$x=7 \Rightarrow x \leq 7$

Konstruera ett polynom p sådant att $p(-1) = p(1) = p(-2) = p(2) = p(0) = 0$ och $p(x) \neq 0$ för alla andra $x \in \mathbb{R}$. Finns det flera olika sådana polynom? Om så är fallet, kan du lägga till ytterligare ett eller flera villkor så att lösningen blir entydig?

INLÄMNAD LÖSNING:

~~$p(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad -2 \leq x \leq 2$~~

?/4

$\Leftarrow (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)x = 0$

ref. t. f-satsen.

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)x = 0$

Ekv. $\Leftrightarrow$ $x^5 - 5x^3 - 4x = 0$?

ej polynom

Vad är p?

Finns fler. Lägg till villkoret att det ska vara femte gradens.

Otillräckligt.

Dessutom: koeff framför x^5 ska vara 1.

$\boxed{p(x) = x^5 - 5x^3 - 4x}$

Uppgift 2a

Vårt gemensamma förslag på lösning (som jag sett).

Faktorsatsen säger att för alla polynom p gäller:

$$p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)\,q(x) \text{ f. nåt polynom } q.$$

Det betyder att $p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)x$ har de egenskaper som efterfrågas. Det har de efterfrågade nollställena ± 1, ± 2 och 0 och kan inte ha fler nollställen för enligt faktorsatsen skulle polynomet, om det hade nåt annat nollställe a, också ha en faktor $(x-a)$.

Forts. nedan:

Uppgift 2a

Forts: Finns det fler polynom med dessa egenskaper? Ja, vi kan multiplicera vårt $p(x)$ med vilket polynom som helst som inte har andra reella nollställen än ± 1, ± 2 och 0. Så enligt faktorsatsen är alla polynom som uppfyller villkoren på formen

$$q(x) = p(x) \cdot (x-1)^{a_1} \cdot (x+1)^{a_2} \cdot (x-2)^{a_3} \cdot (x+2)^{a_4} \cdot x^{a_5} \cdot s(x)$$

där $a_1, \dots, a_5$ är icke-negativa heltal och $s(x)$ ett polynom utan reella nollställen och $p(x)$ som ovan.. Faktorsatsen implicerar att varje polynom som uppfyller villkoren har grad minst 5 så om vi lägger till kravet att polynomet ska ha grad 5 och dessutom ha koefficienten 1 framför x^5 så blir lösningen entydig.

Uppgift 2a

Uppgift 2 b

Ange ett fjärdegradspolynom q som har precis två reella nollställen. INLÄMNAD LÖSNING:

$$q(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

Två dubbelrötter 1 och 2.

Vår lösning: Enligt faktorsatsen så måste ett polynom som har de reella nollställena a och b ha faktorerna $(x-a)$ och $(x-b)$. Om vi multiplicerar produkten av dessa med ett andragradspolynom $s(x)$ utan reella nollställen får vi ett polynom q med de rätta egenskaperna. Tex kan vi ta $q(x) = (x-1)(x-2)(x^2+1)$.

Uppgift 2b

Uppgift 2b

Uppgift 2b

Uppgift 3

$a^3 = b \iff a = \sqrt[3]{b}$

Lös ekvationen $\sqrt[3]{x^2 + 4x - 4} = x$

INLÄMNAD LÖSNING:

$\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x$ $\iff$?

$\Rightarrow x^2+4x-4 = x^3$ $\Rightarrow$?

$\Rightarrow x^3-x^2-4x+4 = 0$

$1 - 1 - 4 + 4 = 0$

Förklara!

Ser att $x=1$ är en lösning.

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x-1 \overline{\big) x^3 - x^2 - 4x + 4} \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -4x+4 \\ -(-4x+4) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x=1$ el. $x=2$, el. $x=-2$

Vi löser $x^2-4=0 \iff x = \pm 2$.

Kontrollerar lösningarna:

$\sqrt[3]{1+4-4} = 1$ ok

$\sqrt[3]{4+8-4} = 2$ ok

$\sqrt[3]{4-8-4} = \cancel{2i}$ -2 ok. falsk rot

Fel.

Svar: 1, 2 Fel svar.

Dåligt formulerat svar.

Uppgift 3

$$\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x$$

$\Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Ser att $x=1$ lösning.

så $(x-1)$ är en faktor.

Polynomdiv. ger

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+2) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x=1$ el. $x=2$ el. $x=-2$.

Uppgift 3

Vår lösning 1

Det gäller att $\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x \iff x^2+4x-4 = x^3$

$\iff x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Vi ser att $x=1$ är en lösning till denna ekvation. Enligt faktorsatsen är då $x-1$ en faktor i vänster led. Med polynomdivision ser vi att $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$

$$= (x-1)(x-2)(x+2)$$

Därför gäller att

$\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x \iff x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-2)(x+2) = 0$

$\iff x=1$ el. $x=2$ el. $x=-2$.

Svar: Lösningarna är $x=1$, $x=2$, $x=-2$.

Uppgift 3

Vår lösning 2

Vi har att $\sqrt[3]{x^2+4x-4} = x \implies x^2+4x-4 = x^3$

$\implies x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Vi ser att $x=1$ är en lösning till den sista ekvationen. Som i vår lösning 1 ser vi att $x=2$ och $x=-2$ är de övriga lösningarna till den sista ekvationen. Vi måste nu kontrollera om dessa tre lösningar också är lösningar till den ursprungliga ekvationen

Insättning ger: $\sqrt[3]{1^2+4\cdot 1-4} = 1$ stämmer, $\sqrt[3]{2^2+4\cdot 2-4} = 2$ stämmer, $\sqrt[3]{(-2)^2+4\cdot(-2)-4} = -2$ stämmer.

Svar: Lösningarna är $x=1$, $x=2$ och $x=-2$

Uppgift 4

Lös olikheten $x^2 + 1 \geq \dfrac{1}{x+1}$

INLÄMNAD LÖSNING:

$$x^2+1 \geq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+1-\frac{1}{x+1} \geq 0$$

Förklara?

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^3+x^2+x}{x+1} \geq 0$$

Förklara: gör tre fall...

Alt:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x\overbrace{(x^2+x+1)}^{+\ \left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}}{x+1} \geq 0$$

+ teckentabell.

1. $x^3+x^2+x \geq 0$, $x+1 \geq 0$ } Förklara $\dashrightarrow$ $x \geq 0$ || R

2. $x^3+x^2+x \leq 0$, $x+1 < 0$ } Förklara $\dashrightarrow$ $x < -1$ || R

$x \neq -1$ stö.

Svar: ....

Uppgift 4

Vår lösning 1: vi ser att $x \neq -1$. Det gäller att

$$x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \iff x^2+1-\frac{1}{x+1} \geq 0 \iff$$

$$\frac{(x^2+1)(x+1)-1}{x+1} \geq 0 \iff \frac{x^3+x^2+x}{x+1} \geq 0 \iff$$

$$\frac{x(x^2+x+1)}{x+1} \geq 0.$$ Vi ser att $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$.

TECKENSTUDIUM:

		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x^2+x+1)}{x+1}$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

Av teckenstudiet följer att olikheten är uppfyld då $x<-1$ och då $x \geq 0$.

Svar: $x<-1$ eller $x \geq 0$.

Uppgift 4

ANNAN INLÄMNAD LÖSNING

$$x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \quad (*)$$

Fall 1 $x+1>0$

$(*) \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \geq 1$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x+1 \geq 1$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x \geq 0$

$\Leftrightarrow x\overbrace{(x^2+x+1)}^{>0} \geq 0$

$\cancel{x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1} = ?}$

$\Leftrightarrow$ ~~Svar:~~ $x \geq 0$.

Fall 2 $x+1<0$

$* \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) \leq 1$

$\vdots$

$x < -1$

Uppgift 4

Vår lösning 2. Vi ser att $x \neq -1$. Vi delar in lösningen i två olika fall. Fall 1 är då $x > -1$ och fall 2 är då $x < -1$.

Fall 1. När $x > -1$ gäller att $x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \iff$

$(x+1)(x^2+1) \geq 1 \iff x^3+x^2+x+1 \geq 1 \iff$

$x^3+x^2+x \geq 0 \iff x(x^2+x+1) \geq 0 \iff$

$x\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\right) \geq 0 \iff x \geq 0$. Olikheten är alltså uppfylld för alla $x \geq 0$.

Fall 2. När $x < -1$ gäller att $x^2+1 \geq \frac{1}{x+1} \iff$

$(x+1)(x^2+1) \leq 1 \iff x^3+x^2+x+1 \leq 1 \iff$

$x(x^2+x+1) \leq 0 \iff x\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) \leq 0 \iff x \leq 0$.

Eftersom ekvivalenserna här bara gäller då $x < -1$ får vi i fall 2 att olikheten är uppfylld för alla $x < -1$. Svar...

Uppgift 5

Finns det nåt rationellt tal r sådant att $r^3 = 3$? Bevisa ditt påstående.

INLÄMNAD LÖSNING

Antagande: a^3 delbart med 3 $\Leftrightarrow$ a delbart med 3

$a^3 = 3 \cdot b^3$ $\Rightarrow$ innebär att båda led är delbara med 3

b^3 delbart med 3 $\Leftrightarrow$ b delbart med 3

a och b har en gemensam faktor

$\Rightarrow r^3 \neq 3.$

Uppgift 5

Antag att r är rationellt och $r^3 = 3$.

Då $r = \frac{p}{q}$ förkortat så långt möjligt.

$\frac{p}{q}$ inte är förkortat så långt möjligt

Motsägelse.

Slutsats: Antagandet var fel.

Uppgift 5

<u>Vår lösning</u>. Det finns inget rationellt tal r sådant att $r^3 = 3$.

<u>Bevis</u>: Antag att det finns ett rationellt tal r sådant att $r^3 = 3$. Då kan r skrivas $r = \frac{p}{q}$, för heltal p och q, förkortat så långt som möjligt. Vi har då att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 = 3 \Rightarrow p^3 = 3q \Rightarrow 3 \mid p^3 \Rightarrow 3 \mid p \text{ (ty 3 primt)}.$$

Så $p = 3s$ för nåt heltal s. Det ger att

$$\frac{p}{q} = \frac{3s}{q} \text{ och } \left(\frac{p}{q}\right)^3 = 3 \Rightarrow \left(\frac{3s}{q}\right)^3 = 3 \Rightarrow 3^3 s^3 = 3q^3$$

$$\Rightarrow 3 \mid q^3 \Rightarrow 3 \mid q, \text{ (ty 3 primtal)}.$$

Uppgift 5

Vi får alltså att både p och q är delbara med 3 vilket motsäger att $\frac{p}{q}$ var förkortat så långt möjligt.

Antagandet att det finns ett rationellt tal r s.a. $r^3 = 3$ leder alltså till en motsägelse. Därför kan inte antagandet vara sant.

Det finns alltså inget rationellt tal r s.a. $r^3 = 3$.

Uppgift 5

Uppgift 6

Elev: ”Eftersom både $2 \cdot 2 = 4$ och $(-2) \cdot (-2) = 4$ så måste $\sqrt{4} = \pm 2$”. Rätt eller fel? Vad svarar du eleven?

$x^2 = 4$ har tre lösningar
men bara en av dessa är $\sqrt{4}$.

Det $x \geq 0$. $\sqrt{x}$ är det icke-neg. tal vars kvadrat är x.

$-\sqrt{4}$

Uppgift 6

$x^2 = 4$ har två lösningar men bara en av dessa är $\sqrt{4}$, nämligen den positiva.

Det är ett val vi har gjort i definitionen av kvadratroten.

<u>Def</u>: För icke-negativa reella tal x definieras $\sqrt{x}$ som det icke-negativa tal vars kvadrat är x.

Uppgift 6