

Föreläsning 7

SF 1661

HT 21

16/9

• Summor

$$= \sum_{k=1}^n a_k$$

◦ aritmetiska

◦ geometriska

• Induktionsbevis
(även F8)

Summation notation

Exempel

$$\sum_{k=1}^9 k \cdot 10^k =$$

$$= 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + \dots + 9 \cdot 10^9$$

övre summationsgräns summasymbol ("stora sigma")

$$\sum_{k=1}^9 k \cdot 10^k$$

term

nedre summationsgräns

summationsindex

"Summan av $k \cdot 10^k$
när k löper från
1 till 9"

Exempel:

$$\bullet \sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$\bullet \sum_{j=2}^{10} j^2 = 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$$

$$\bullet \sum_{m=-3}^3 2^m = 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$

$$\bullet \sum_{i=0}^5 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

$$\bullet \sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=0}^4 (2k+2) = (2 \cdot 0 + 2) + (2 \cdot 1 + 2) + (2 \cdot 2 + 2) + (2 \cdot 3 + 2) + (2 \cdot 4 + 2) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$\sum_{j=1}^5 2j = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$\sum_{l=-1}^3 (2l+4) = (-2+4) + (0+4) + (2+4) + (4+4) + (6+4) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

$$2 \sum_{m=0}^4 (k+1) = 2(1+1) + 2(2+1) + 2(3+1) + 2(4+1) + 2(5+1) = 2(1+2+3+4+5) = \underline{2 + 4 + 6 + 8 + 10}$$

En given samma kan skrivas
på (oändligt) många olika sätt.

Tex gäller enligt föregående

håll att

$$\sum_{k=0}^4 (2k+2) = \sum_{j=1}^5 2j = \sum_{l=-1}^3 (2l+4) = 2 \sum_{m=0}^4 (m+1)$$

Index byt

gör ett index byt i summan

$$S = \sum_{j=1}^{10} (j+1) \cdot 2^j$$

10 termer

så att indexeringen börjar på 0.

dus samma summa S ska skrivas

på formen

$$\sum_{k=0}^9 a_k$$

10 termer

Index byt

gör ett indexbyte i summan

$$S = \sum_{j=1}^{10} (j+1) \cdot 2^j$$

så att indexeringen börjar på 0.

Sätt $k = j - 1$ (så att $j \geq 1 \Rightarrow k \geq 0$).

Index byt

gör ett indexbyte i summan

$$S = \sum_{j=1}^{10} (j+1) \cdot 2^j$$

så att indexeringen börjar på 0.

Sätt $k = j - 1$ (så att $j \geq 1 \Rightarrow k \geq 0$).

De är $j = k + 1$, och vi får

$$S = \sum_{k=0}^9 (k+2) 2^{k+1}$$

Sats:

$$\bullet \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

$$\bullet c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n c a_k$$

Förteckla:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100$$

Föreläsa:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100 = \left\{ \begin{array}{c} j = k+1 \\ \text{ändra summans} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^1 k^2 - 2 \sum_{j=1}^{100} (j-1) - 100 =$$

Föreläsa:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100 = \left\{ \begin{array}{l} j = k+1 \\ \text{ändra summans} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{k=1}^1 k^2 - 2 \sum_{j=1}^{100} (j-1) - 100 =$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{100} (k-1) - \sum_{k=1}^{100} 1$$

Föreläsning:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=0}^{99} k - 100 = \left\{ \begin{array}{l} j = k+1 \\ \text{andra summans} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^1 k^2 - 2 \sum_{j=1}^{100} (j-1) - 100 =$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{100} (k-1) - \sum_{k=1}^{100} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{100} (k^2 - 2k + 2 - 1) = \sum_{k=1}^{100} (k-1)^2 = \sum_{m=0}^2 m^2 = \sum_{m=1}^{99} m^2$$

$m = k-1$

Aritmetiska summa

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \sum$$

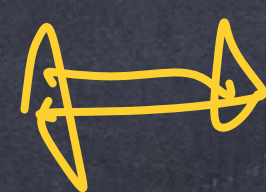
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

$$+ S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101$$

100 st

$$2S = 100 \cdot 101$$



$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = \underline{\underline{5050}}$$

Definition: En summa $\sum_{k=m}^n a_k$

kallas en aritmetisk summa om
det finns en konstant d sådan att

$$a_{k+1} - a_k = d \quad \text{för alla } k, \quad m \leq k \leq n-1$$

$$\text{Alltså är } \sum_{k=m}^n a_k = a_m + (a_m + d) + (a_m + 2d) + \dots + (a_m + Nd)$$

där $N = n - m + 1$ är antalet termer.

Exempel

$$8 + 11 + 14 + 17 + 20$$

$$= \sum_{k=2}^6 (\underline{k \cdot 3} + 2) =$$

$$= \sum_{k=0}^4 (\underline{k \cdot 3} + 8)$$

Aritmetisk med
differens $d=3$

Ex. Beräkna $S = \sum_{k=2}^{20} (4k+1)$ Aritmetisk
differs = 4

$$S = 9 + 13 + 17 + \dots + 77 + 81$$

Ex. Beräkna $S = \sum_{k=2}^{20} (4k+1)$ Aritmetisk
differs = 4

$$S = 9 + 13 + 17 + \dots + 77 + 81$$

$$+ S = 81 + 77 + 73 + \dots + 13 + 9$$

$$2S = \underbrace{90 + 90 + 90 + \dots + 90 + 90}_{19 \text{ termer}}$$

$$2S = 19 \cdot 90$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{19 \cdot 90}{2} = 19 \cdot 45 = \dots$$

Aufgabe: Berechna summan

$$S = \sum_{k=0}^7 (3k+2) = 2 + 5 + 8 + \dots + 23$$

$$S = 2 + 5 + \dots + 23$$

$$S = 23 + 20 + \dots + 2$$

$$2S = \underbrace{25 + 25 + \dots + 25}_{8 \text{ St}}$$

$$2S = 8 \cdot 25$$

$$S = 4 \cdot 25 = 100$$

Aritmetiska summor

Sats. Om

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (kb + a_0)$$

är en aritmetisk summa med N stycken termer, första term a_0 och sista term $a_{N-1} = (N-1)b + a_0$, så är

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (kb + a_0) = N \frac{a_0 + a_{N-1}}{2}$$

= (antal termer) · (medelvärdet av första och sista termen)

Beweis

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} kb + a_0 = \left\{ M = N-1 \right\} = \sum_{k=0}^M kb + a_0$$

$$S = a_0 + (b + a_0) + (2b + a_0) + \dots + (Mb + a_0)$$

$$+ S = (Mb + a_0) + ((M-1)b + a_0) + ((M-2)b + a_0) + \dots + a_0$$

$$2S = (Mb + 2a_0) + (Mb + 2a_0) + \dots + (Mb + 2a_0)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{M+1=N} \quad s \in \mathbb{Z}.$$

$$2S = (Mb + 2a_0) \cdot N$$

$$S = \frac{a_0 + (a_0 + Mb)}{2} \cdot N$$

$$= \frac{a_0 + (a_0 + (N-1)b)}{2}$$

$$= \frac{N \cdot (a_0 + a_{N-1})}{2}$$

V.S.B.

Example
500 000

$\sum$

$$2n = (2 + 4 + \dots + 1\,000\,000)$$

$$n = 1$$

$$= 500\,000 \frac{2 + 1\,000\,000}{2} = 500\,000 \cdot 500\,001$$

$$= 250\,000\,500\,000$$

Definition En samma $\sum_{k=n}^m a_k$ kallas

en geometrisk samma om det

föreligger en konstant q sådan att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \text{för alla } k = n, n+1, \dots, (m-1).$$

Det betyder att

$$\sum_{k=n}^m a_k = a_n + a_n q + a_n q^2 + \dots + a_n q^{N-1}$$

där $N = m - n + 1$ är antalet termer

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

$q = 2$

$$\sum_{k=1}^{10} 5 \cdot 10^{k-1} = 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^2 + \dots + 5 \cdot 10^{10}$$

$q = 10$

$$\sum_{l=0}^{20} (-1)^l = (-1)^0 + (-1)^1 + \dots + (-1)^{19} + (-1)^{20}$$

$$= \underbrace{1 - 1}_0 + \underbrace{1 - 1}_0 + \dots + \underbrace{1 - 1}_0 + 1 = 1$$

$q = -1$

Exempel

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{100}}$$

$k=1$

är geometrisk, med första term $\frac{4}{3}$
 100 termer och kvot $\frac{1}{3}$.

S kan också skrivas t.ex.

$$S = \sum_{l=0}^{99} 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{l+1} \text{ eller } S = \sum_{l=0}^{99} \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^l$$

Att beräkna en geometrisk summa. Ex:

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Summan är geometrisk
med kvot $q = 1/3$.

$$S = \frac{4}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{99}} + \frac{4}{3^{100}}$$

$$\frac{1}{3} S = \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{100}} + \frac{4}{3^{101}}$$

$$S - \frac{1}{3} S = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^{101}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} S = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) \Leftrightarrow S = 2 \left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)$$

Uppgift: Beräkna $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $q = 1/2$

$$S = \left(\frac{1}{2}\right) + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \dots + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^9} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$$

$$-\frac{1}{2}S = \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \dots + \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Geometriska summor

Sats. Om

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k$$

är en geometrisk summa med första term a_0 , N stycken termer och kvot $q \neq 1$ är

$$\begin{aligned} S &= a_0 \frac{1 - q^N}{1 - q} \\ &= (\text{första term}) \cdot \frac{1 - (\text{kvoten})^{\text{antal termer}}}{1 - (\text{kvoten})} \end{aligned}$$

Om $q = 1$ är $S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = Na_0$

Bevis
(fallet $q \neq 1$)

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^{N-2} + a_0 q^{N-1}$$

$$= qS = a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^{N-1} + a_0 q^N$$

$$S - qS = a_0 - a_0 q^N$$

$$S(1-q) = a_0(1-q^N)$$

$$\Rightarrow S = a_0 \frac{1-q^N}{1-q}$$

Speciellt gäller

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

(Minnesstöd / kontroll):

$$(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})(1 - r)$$

$$= (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) - r(1 + r + \dots + r^{n-1})$$

$$= \cancel{1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}} - \cancel{r - r^2 - \dots - r^{n-1} + r^n} = 1 - r^n$$

Induktionsbevis

(forts. följer

nästa föreläsning)

Induktionsbevis

Teknik för att bevisa en utsaga $P(n)$
som gäller av ett heltal n ,
och som skall bevisas sann
för alla $n \Rightarrow$ (något visst N_0).

1-ex: • $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$, för alla $n \geq 1$

• $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt + delbart
med 4 för alla $n \geq 0$

• $2^n > n^2$ för alla $n \geq 5$

Princip

För att visa att $P(n)$
är sant för alla heltal $n \geq N_0$

(I) Visa att $P(N_0)$ sant
Induktionsbas

(II) Visa att implikationen
 $P(k) \text{ sann} \Rightarrow P(k+1) \text{ sann}$

"
är sann för alla heltal $k \geq N$
Induktionssteg

(I) Visa att $P(N_0)$ sant

(II) Visa att implikationen
 $P(k) \text{ sann} \Rightarrow P(k+1) \text{ sann}$
är sann för alla heltal $k \geq N$

• Enligt (I) är nu $P(N_0)$ sann.

• Eftersom $P(N_0)$ sann, ger (II) att $P(N_0+1)$ sann

• Eftersom $P(N_0+1)$ sann, ger (II) att $P(N_0+2)$ sann

osv.

Enligt INDUKTIONSPRINCIPEN är

(II)

da $P(n)$ sant för alla $n \geq N_0$.

$\forall \varepsilon$ visar $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$P(n)$

(I) För $n=1$ gäller att

Induktions
bas

$$V.L. = \sum_{j=1}^1 j = 1$$

$$H.L. = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

slutsats: $P(1)$ är sann

(II)

Vi ska nu visa implikationen

induktions
steg $P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \geq 1$

dvs vi ska visa att

OM $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$, för något $k \geq 1$

SÅ är också $\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

• Antag att $P(k)$ är sann, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (induktions-
antagande)*

Antag att $P(k)$ är sann, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

Då gäller för $n=k+1$ att

$$\underline{\underline{V.L. (n=k+1) =}}$$

$$\underline{\underline{H.L. (n=k+1) =}}$$

Induktions-
steg

• Antag att $P(k)$ är sann, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
 antagande)*

• Då gäller för $n = k+1$ att

$$\underline{V.L. (n = k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} j \overset{\substack{\text{Omskrivning} \\ \text{för att} \\ \text{kunna} \\ \text{använda (*)}}}{=} \sum_{j=1}^k j + (k+1) \overset{\substack{\text{Enligt} \\ (*)}}{=}$$

$$\underline{H.L. (n = k+1) =}$$

Induktions-
 steg

Antag att $P(k)$ är sann, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
antagande)*

Då gäller för $n=k+1$ att

$$\underline{V.L. (n=k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^k j + (k+1) \stackrel{\text{Enligt } (*)}{=}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \stackrel{\text{förenkling}}{=} \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \underline{\underline{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}}$$

$$\underline{\underline{H.L. (n=k+1) =}}$$

Induktions-
steg

Antag att $P(k)$ är sann, dvs
antag $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktions-
 antagande)*

Då gäller för $n = k+1$ att

$$\underline{V.L. (n = k+1)} = \sum_{j=1}^{k+1} j \overset{\substack{\text{omskriv } k \\ \text{för} \\ \text{Känna} \\ \text{använda} \\ (*)}}{=} \sum_{j=1}^k j + (k+1) \overset{\text{Enligt}}{=} (*)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \overset{\text{förenkling}}{=} \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underline{H.L. (n = k+1)} = \frac{n(n+1)}{2} \Big|_{n=k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = V.L. (n = k+1)$$

Induktions-
 steg

Vi har i induktionssteget visat att

$$V.L.(n=k) = H.L.(n=k) \Rightarrow V.L.(n=k+1) = H.L.(n=k+1)$$

dvs att

implikationen $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ är sann

Alltså: $P(1)$ sann

 $P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 1$, sann $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)$ sann alla $n \geq 1$

Extra material

Geometrisk serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c q^k$$

$$= c + c q + c q^2 + c q^3 + \dots$$

(Vi återkommer till detta när vi läser om gränsvärden i slutet av kursen)

Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{n \text{ st.}} \right] =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c q^k = \begin{cases} \text{om} \\ q \neq 1 \end{cases}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \text{om} \\ |q| < 1 \text{ so} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$= c \frac{1}{1 - q}$$

Satz: $O_m \quad |q| < 1 \quad \text{Satz}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c q^{k-1} = \frac{c}{1-q}$$

$O_m \quad |q| \geq 1 \quad \text{Satz}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c q^{k-1} e_j^-$ definiert.