

Föreläsning 6

SF1661 HT21

15/9 - 21



# Absolutgelepp

- Definition 2 Eigenschaften

t.ex  $|x + y| \leq |x| + |y|$

- Equationslösnig

t.ex  $|x + 2| = |2x - 1|$

- Lösung av olikheter

t.ex  $|x^2 - 2x + 4| < 1$



$$1 \quad 3 \quad 1 \quad = \quad 3$$

$$1 \quad - \quad 7 \quad 1 \quad = \quad 7$$



Definition

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

= "x is arstånd  $\in$  all origo"

---

$$|3| = \{ 3 \geq 0 \} = 3$$

$$|-7| = \{ -7 < 0 \} = -(-7) = 7$$



Lös ekvationen

$$|x| = c$$

för alla olika värden på  $c$ .

$$c < 0$$

lösning  
saknas

$$c = 0$$

$$x = 0$$

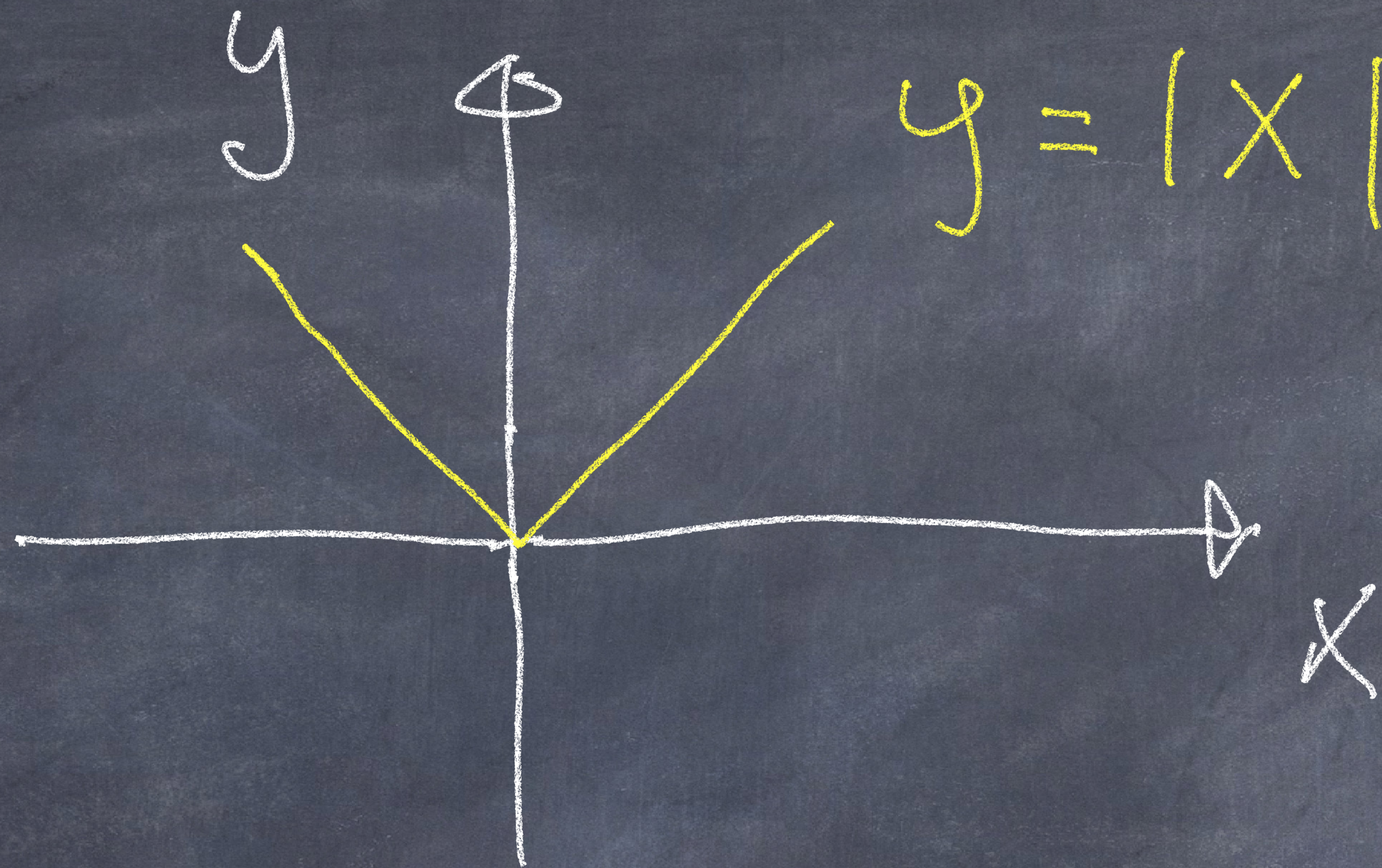
$$c > 0$$

$$x = c$$

eller

$$x = -c$$



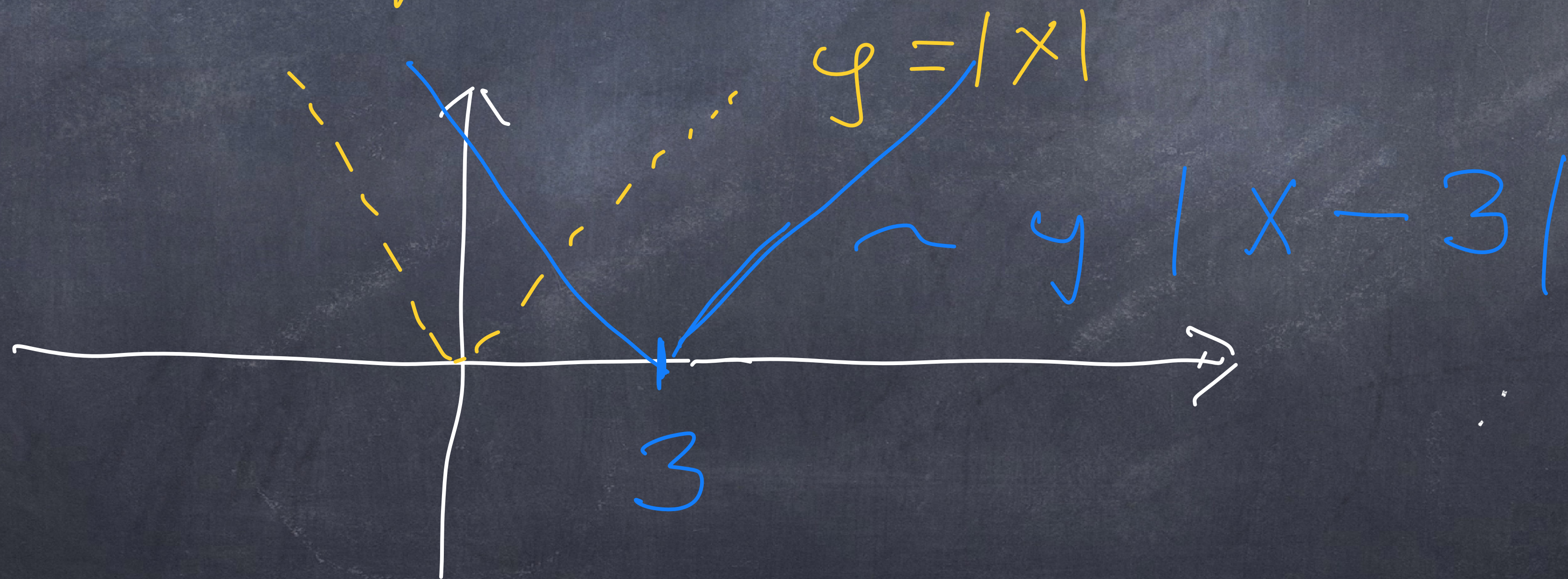


$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Uppgift: Skissera grafen  $y = |x - 3|$

grafen  $y = f(x - a)$  fås från  
grafen  $y = f(x)$  genom att skifte  
den  $a$  steg till höger

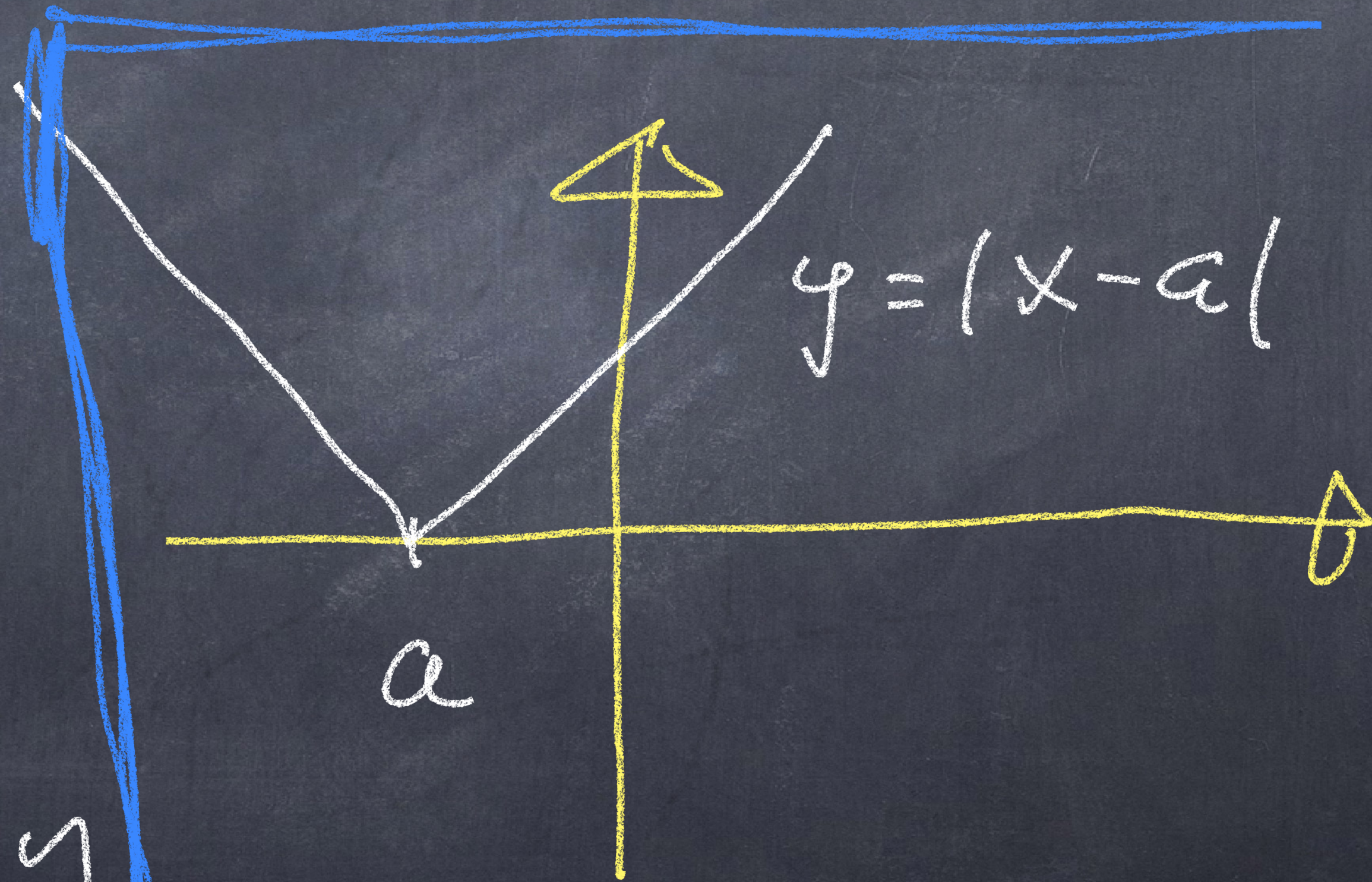




$$|x-a| \stackrel{\text{enl}}{=} \stackrel{\text{def.}}{\text{av}} \begin{cases} (x-a), & (x-a) \geq 0 \\ -(x-a), & (x-a) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ a-x, & x < a \end{cases}$$

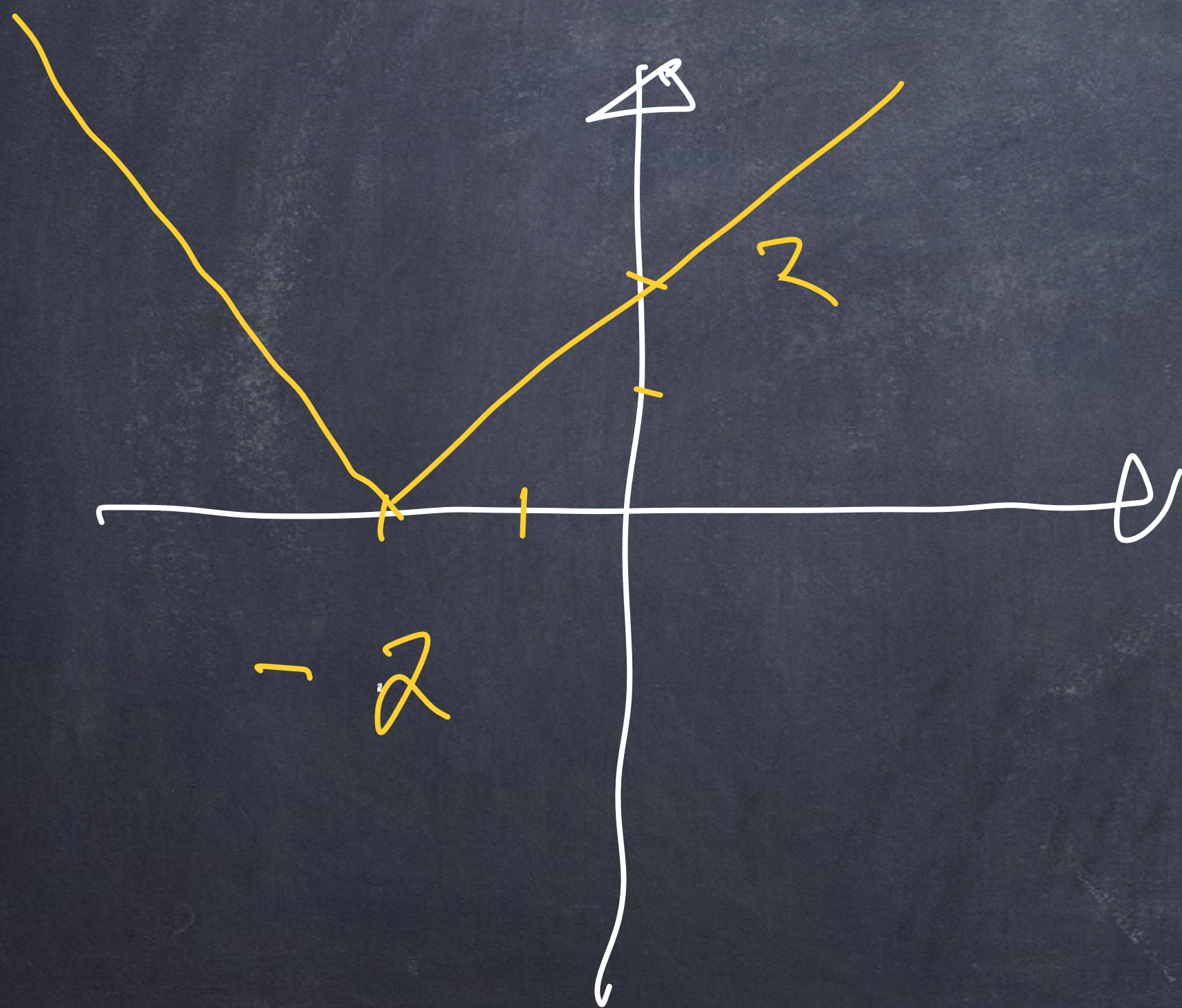
= "avståndet mellan  
a och x"





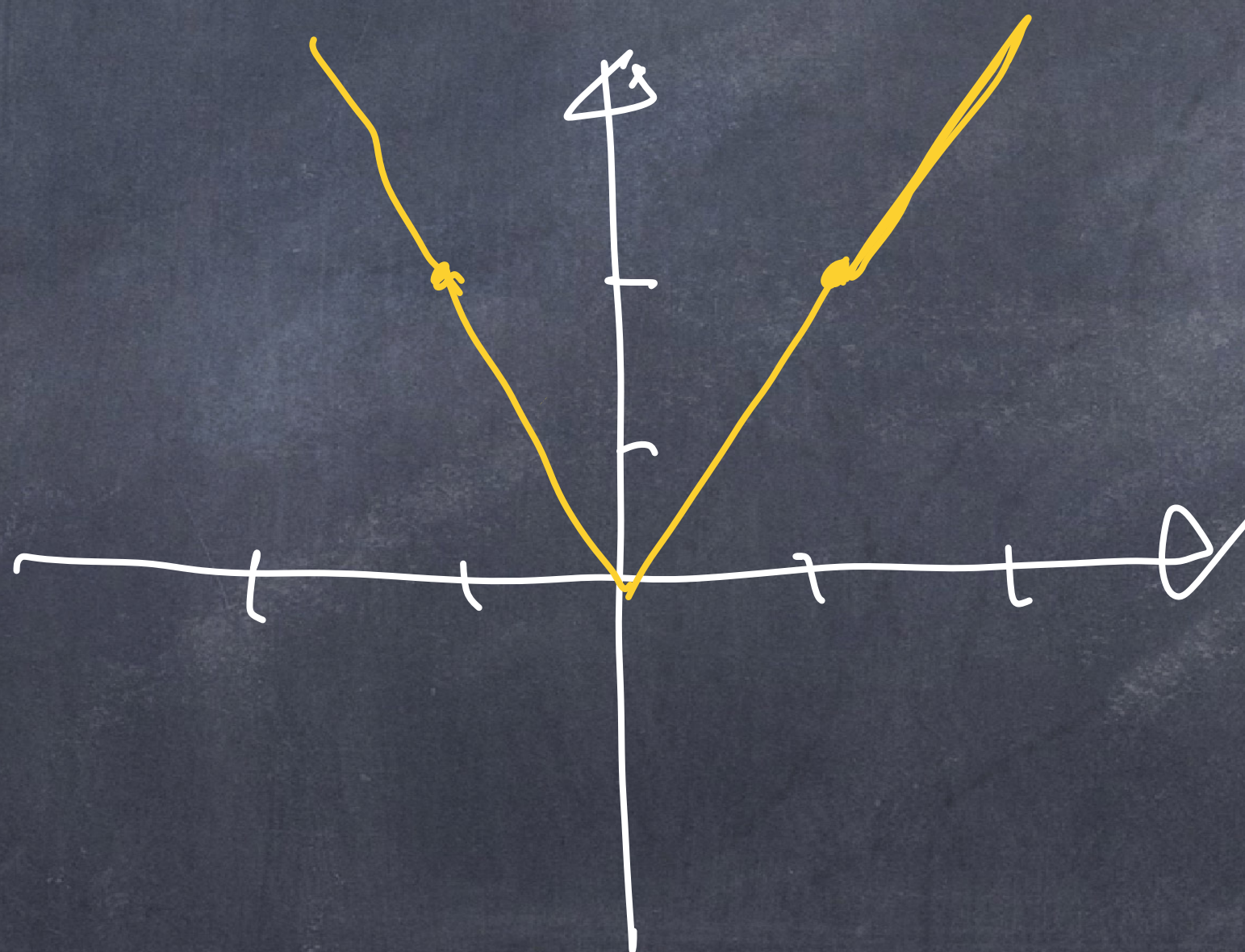
$$y = |x+2|$$

$$= \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$$



$$y = |2x|$$

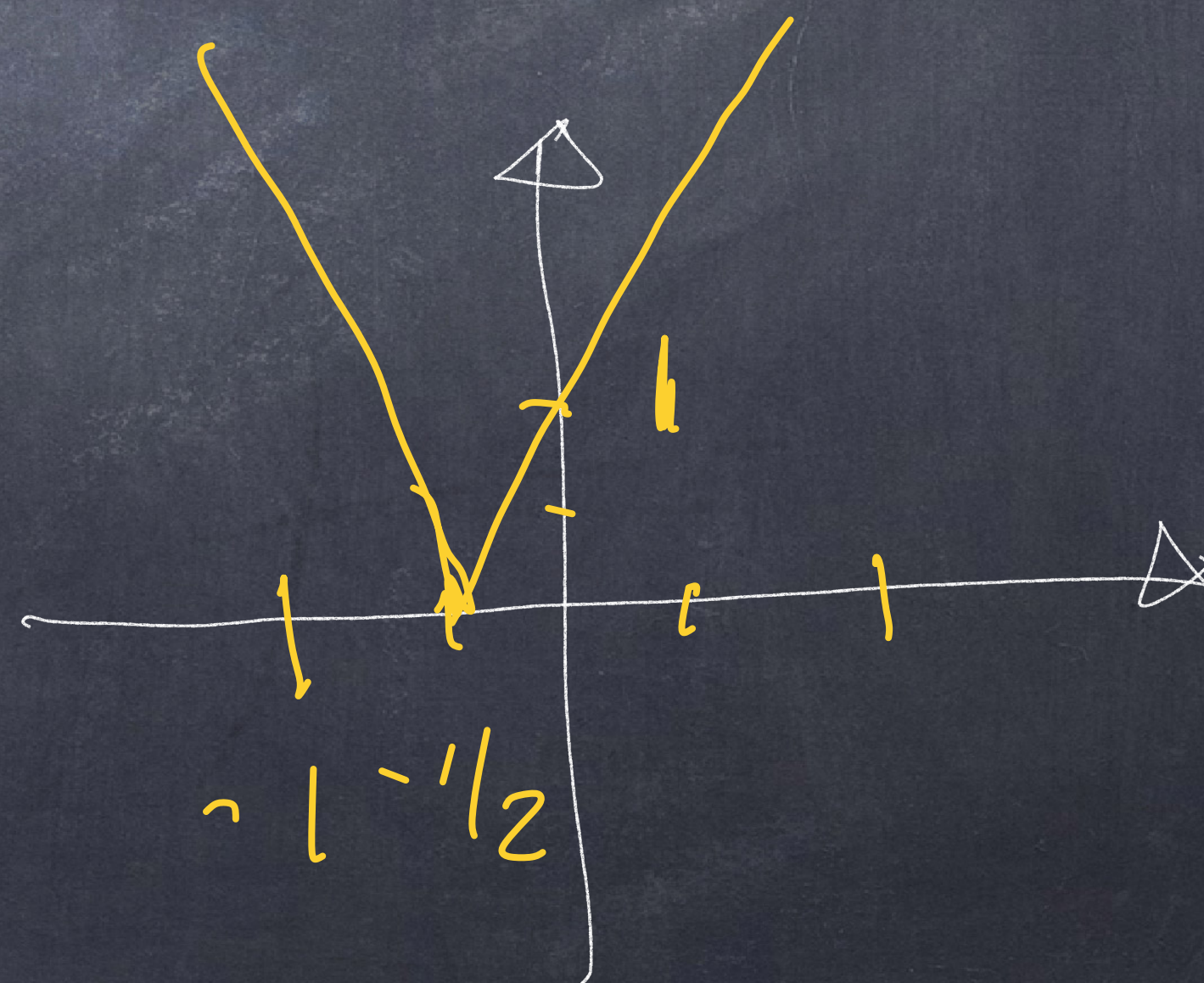
$$= \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y = |2x-1|$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & 2x-1 \geq 0 \\ -2x+1, & 2x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



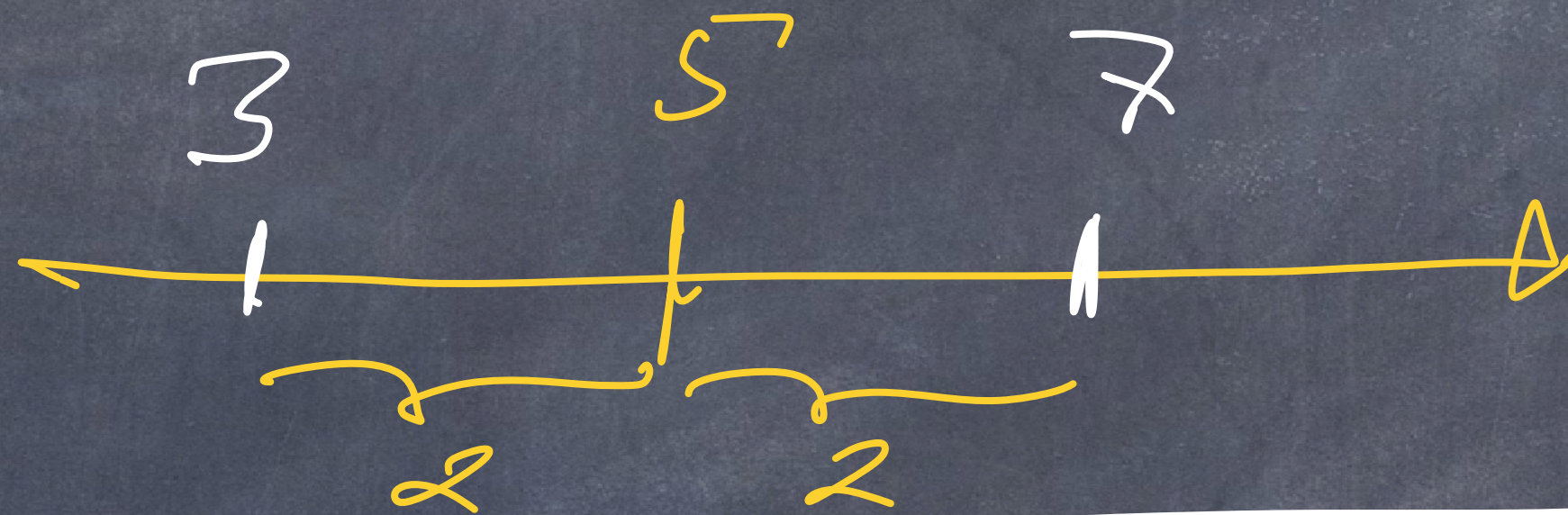


# Lösungsgleichungen

$$|x-5| = 2$$

ALT. (I) Abstandsbekennung:

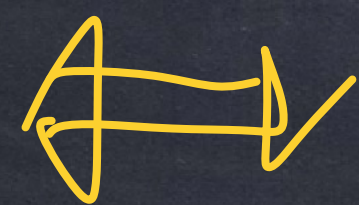
Suche  $x$  s.d. dass Abstand  $2$  zu  $5$  ist.



ALT. (II) Algebraisch Lösung

$$|x-5| = 2$$

$$\begin{aligned} &\iff \\ x-5 &= 2 \quad \vee \quad x-5 = -2 \end{aligned}$$



$$x = 7 \quad \vee \quad x = 3$$

$$\underline{\text{SUA}}: x = 3 \quad \vee \quad x = 7$$



Lös ekvationen  $|5x + 3| = 7$

Alt sätt  $5x = t$ , ekvation blir  $|t + 3| = 7$

①  $\Rightarrow |t - (-3)| = 7$ , dvs  $t$  är ett tal vars avstånd

från  $(-3)$  är 7



dvs  $t = -10$  V  $t = 4 \Rightarrow 5x = -10$  V  $5x = 4 \Rightarrow x = -2$  V  $x = \frac{4}{5}$

Alt.

②  $|5x + 3| = 7$

$\Rightarrow 5x + 3 = 7$  V  $5x + 3 = -7$

$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$  V  $x = -2$

Svar:  $x = -2$  eller  $x = \frac{4}{5}$

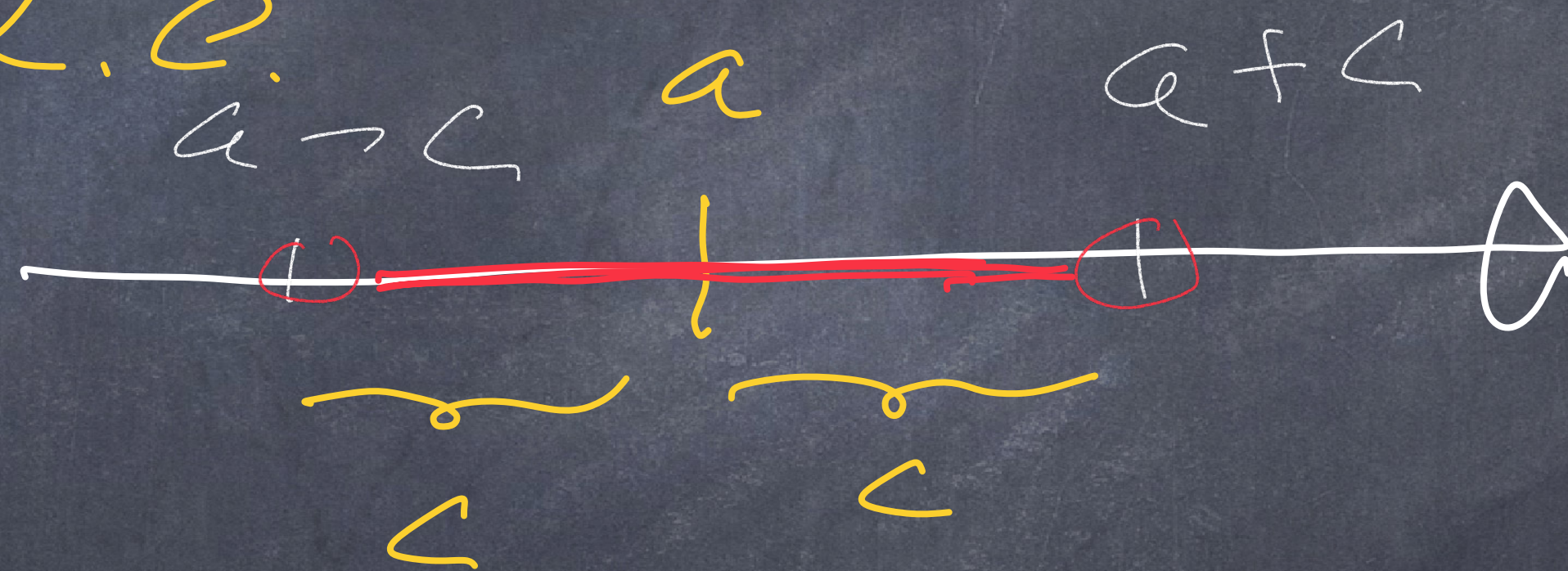


# ○ Likheter av typ $|x-a| < c$

I

Avståndstolkning:

Vi söker  $x$  s.a dess avstånd till  $a$   
är mindre än  $c$  l.e.



II

Algebraisk lösning:

OBS:  $|t| < c \iff -c < t < c$

$$|x-a| < c \iff -c < x-a < c \iff a-c < x < a+c$$

Svar:  $x \in (a-c, a+c)$



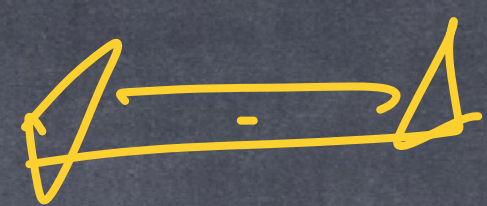
Uppgift:  $\angle$  ös olikheterna

•  $|x| \leq 3$

•  $|x + 2| < 4$



$$|x| \leq 3$$



$$-3 \leq x \leq 3$$



Svar:  $x \in [-3, 3]$







Ös olukheten  $|2x-3| < 5$

$$|2x-3| < 5 \iff -5 < 2x-3 < 5$$

$$\iff -2 < 2x < 8$$

$$\iff -1 < x < 4$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in (-1, 4)$$



Satz  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  s.a.

(i)  $|x| = |-x|$

(ii)  $x \leq |x|$

(iii)  $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

(iv)  $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|, (y \neq 0)$

(v)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

(Dreiecksungleichheit)



Beweis:  $(\bar{L} \bar{L} \bar{L} \mid \mid x \mid \mid y \mid = \mid xy \mid$

Om  $x \geq 0$  och  $y \geq 0$  fås

$$V.L. = \mid x \mid \mid y \mid = \left\{ \begin{array}{l} \mid x \mid = x \quad \text{t.g. } x \geq 0 \\ \mid y \mid = y \quad \text{t.g. } y \geq 0 \end{array} \right\} = xy = \left\{ \begin{array}{l} xy \geq 0 \\ \text{t.g. } x \geq 0 \text{ o.c. } y \geq 0 \\ \text{så } \mid xy \mid = xy \end{array} \right\}$$

$$= \mid xy \mid = H.L.$$

Fallen  $x < 0, y \geq 0$   
och  $x < 0, y \leq 0$  bevisas  
på motsvarande sätt.

Om  $x \geq 0, y \leq 0$  fås

$$V.L. = \mid x \mid \mid y \mid = \left\{ \begin{array}{l} \mid x \mid = x, \text{ t.g. } x \geq 0 \\ \mid y \mid = -y, \text{ t.g. } y \leq 0 \end{array} \right\} = x(-y) = -xy =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -xy \geq 0, \text{ t.g. } x \geq 0 \text{ o.c. } y < 0 \\ \text{så } -xy = \mid xy \mid \end{array} \right\} = \mid xy \mid = H.L.$$



# Triangelolikheten $|x+y| \leq |x| + |y|$

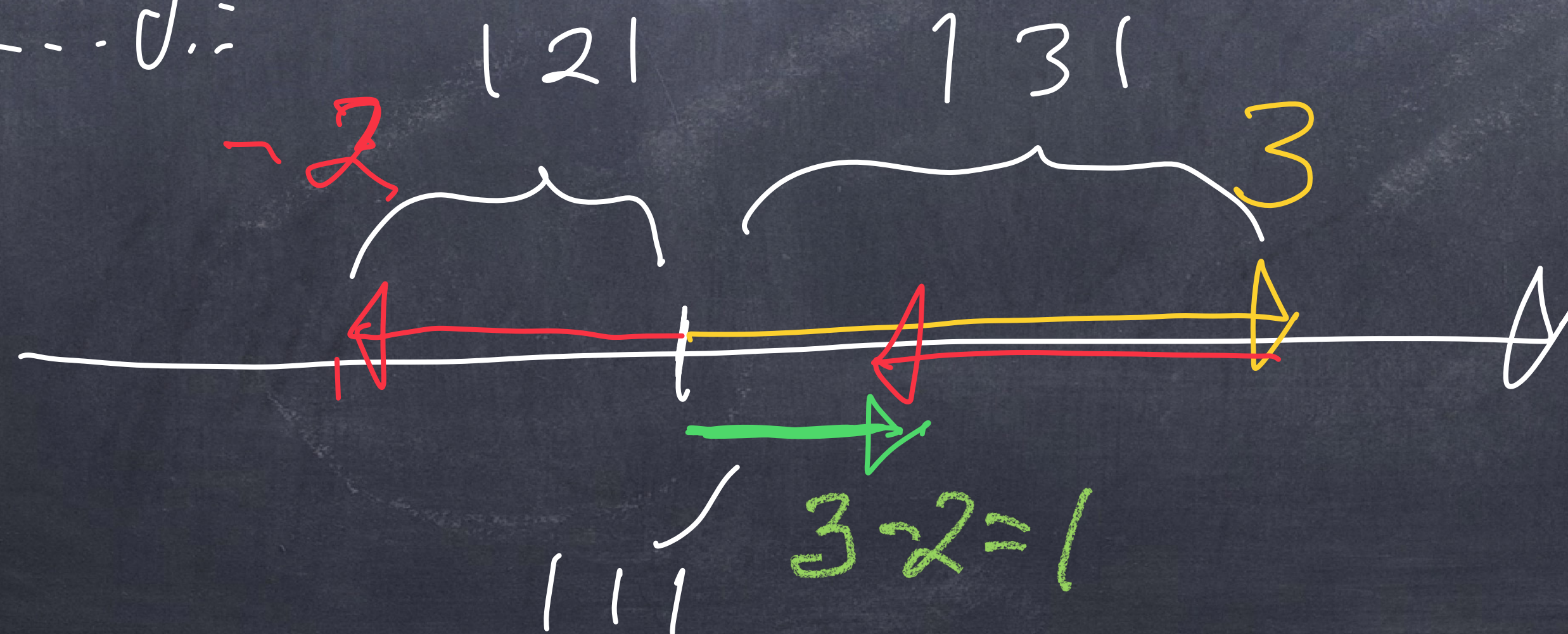
Exempel på  $=$  resp.  $<$  :

$=$  gäller då  $(x \geq 0 \text{ och } y \geq 0)$

och då  $(x < 0 \text{ och } y < 0)$

$<$  gäller då  $x \geq 0 \text{ och } y < 0$  eller vice versa.

Visualisering:





Ex: Ekvationen  $|x+10| = |x|+11$

saken lösning ty

$$V.L. = |x+10| \leq |x| + |10| =$$

triangel  
olikheten

$$= |x| + 10 < |x| + 11 = H.L.$$

$$\text{Så } V.L. < H.L. \quad \forall x.$$



# Exempel på ekvationslösning

•  $|2x - 4| = 3x$ .

•  $\exists$  flera som  $V.L. = |\dots| \geq 0 \quad \forall x$ , således

lösningar för  $H.L. = 3x < 0$  dvs. för  $x < 0$ .

• Om  $x \geq 0$  är ekv. uppfyllt OMM

$(2x - 4) = 3x$  eller  $-(2x - 4) = 3x$





$$\begin{cases} (2x-4) = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} -(2x-4) = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

keine Lösungen

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4 = 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$



$$|f(x)| = g(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

✓

(see  
example  
on page 4)

$$\begin{cases} -f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)|$$



$$f(x) = g(x)$$

✓

$$-f(x) = g(x)$$

(see example on page 4)



$$|x^2 - x - 2| = |x - 1| \quad \left( \begin{array}{l} |a| = |b| \\ \Downarrow \\ a = \pm b \end{array} \right)$$

$$\iff$$

$$x^2 - x - 2 = x - 1 \quad \text{eller} \quad x^2 - x - 2 = 1 - x$$

$$\iff x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$\iff x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

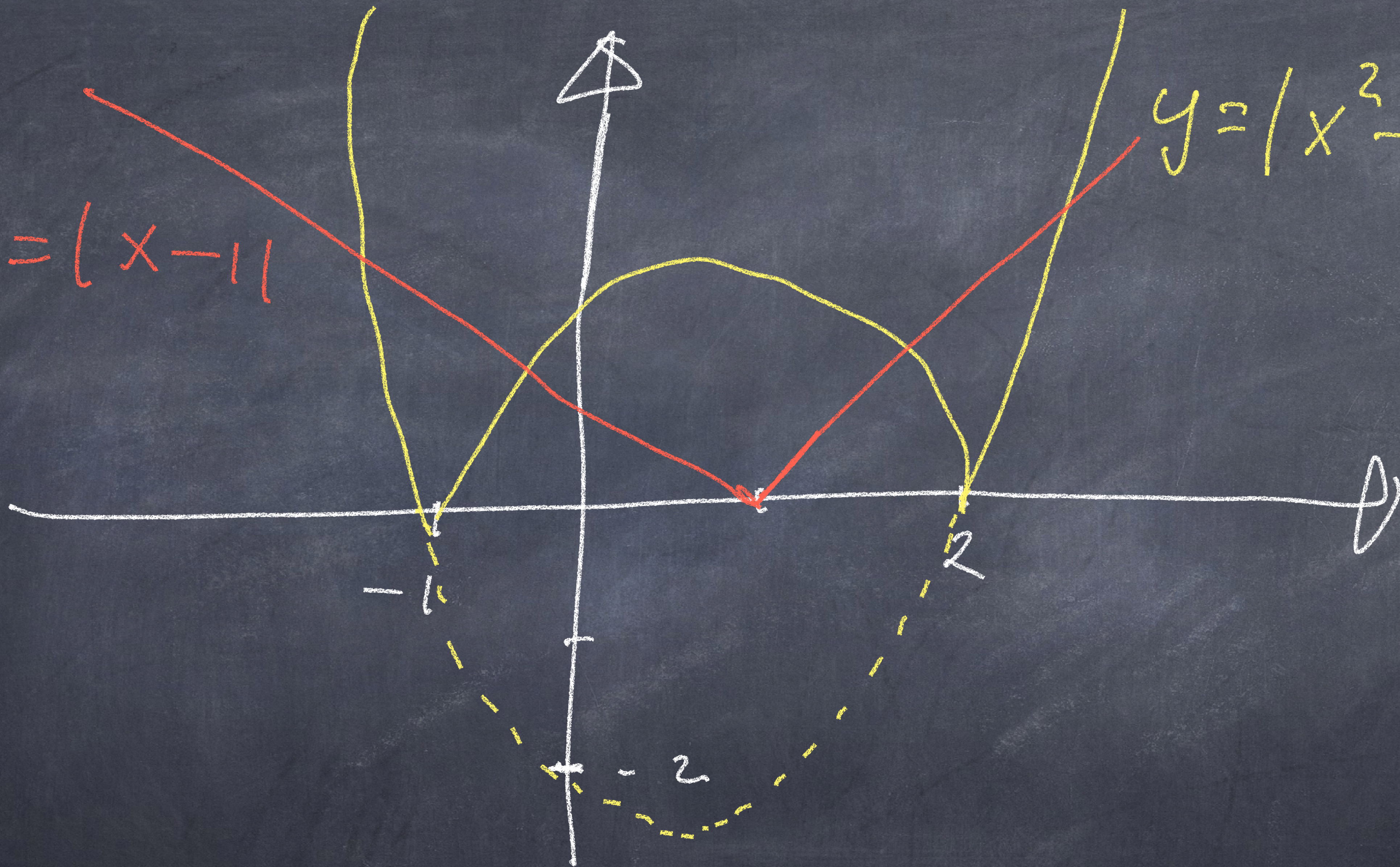
---


$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$



$$y = |x - 1|$$

$$y = |x^2 - x - 2|$$

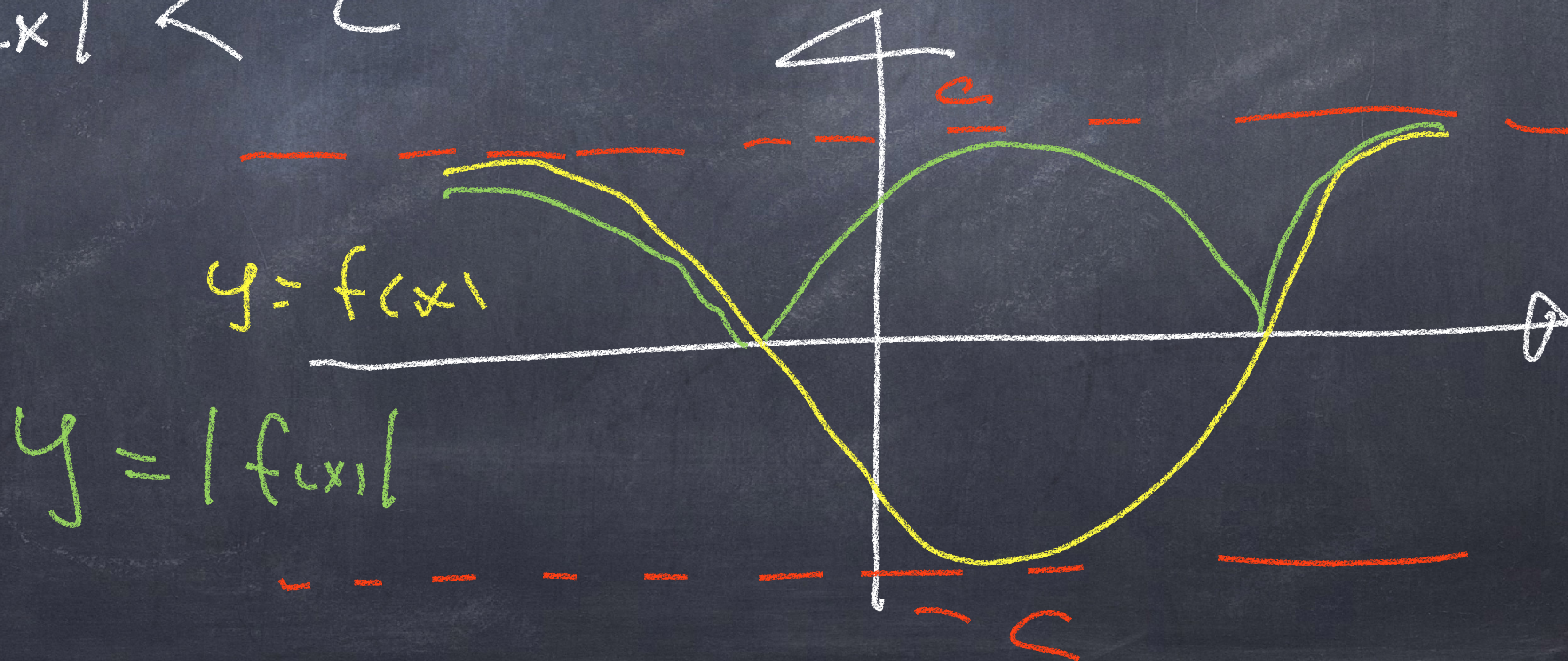




ÖLikheter med 1.1

$$|f(x)| < C \quad \Leftrightarrow$$

$$-C < f(x) < C$$





$$2.4: 3 \text{ (i)}$$

$$|x^2 - 1| \leq 1 \quad \Rightarrow$$

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2} \quad \checkmark \quad -\sqrt{2} \leq x \leq 0$$



$|x+3| \geq 2x$  (\*), Löses med "falluppdelning"

$$I_1 = (-\infty, -3) \quad -3 \quad I_2 = [-3, \infty)$$

$$x+3 < 0 \Rightarrow |x+3| = -(x+3)$$

$$\text{Så (*)} \Rightarrow$$

$$-(x+3) \geq 2x$$

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow |x+3| = x+3$$

$$\text{Så (*)} \Rightarrow$$

$$(x+3) \geq 2x$$



På  $I_1 = (-\infty, -3]$  fås villkoret

$$-(x+3) \geq 2x \iff -x-3 \geq 2x$$

$$\iff 3x < -3 \iff x < -1, \text{ uppfyllt } \forall x \in I_1$$

Så på  $I_1$  får vi lösningsmängd  $L_1 = I_1$

---

På  $I_2 = [-3, \infty)$  fås villkoret

$$(x+3) \geq 2x \iff x \leq 3, \text{ så från } I_2$$

får vi lösningsmängd  $L_2 = [-3, 3]$



Alltså har  $|x+3| \geq 2x$

lösningssamling

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -3) \cup [-3, 3]$$

$$= (-\infty, 3]$$

Svar:  $x \leq 3$

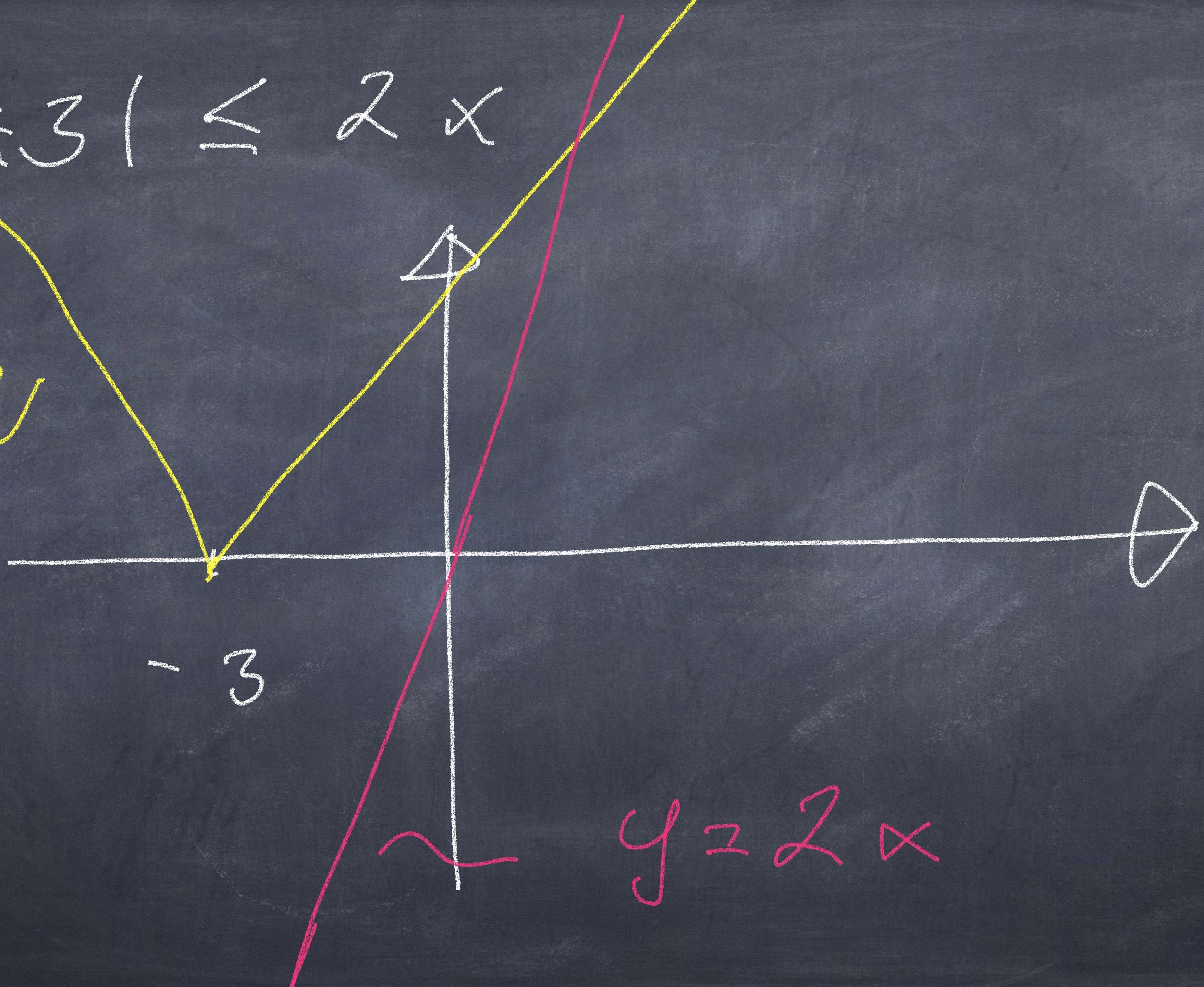


$$|x+3| \leq 2x$$

$$y = x+3$$

-3

$$y = 2x$$

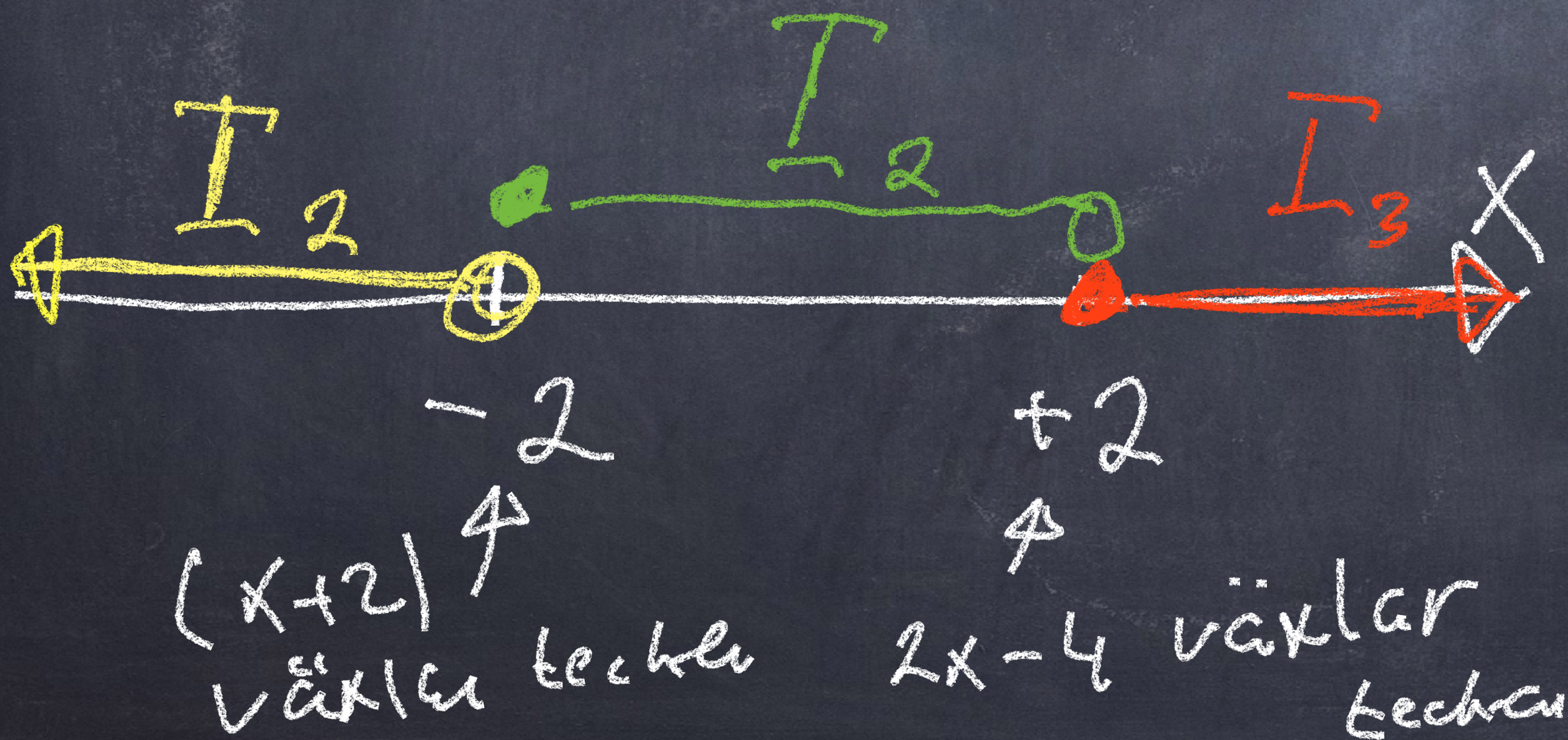




Lös olikheten

$$|2x-4| < |x+2|$$

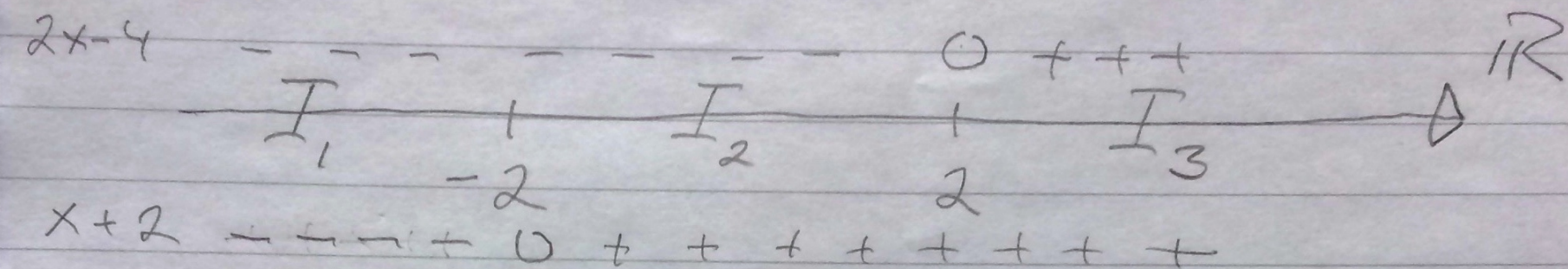
Falluppdelning



• Lös olikheten  $|2x-4| < |x+2|$  (\*)

$2x-4$  växlar tecken i  $x=2$

$x+2$  växlar tecken i  $x=-2$



• Falluppdelning:

• I. Om  $x \in I_1 = (-\infty, -2)$  är  $2x-4 < 0$  &  $x+2 < 0$ .  
Då är (\*)  ~~$-(2x-4) < -(x+2)$~~

$$\Leftrightarrow (2x-4) > (x+2) \Leftrightarrow x > 6.$$

Eftersom inget  $x \in I_1$  uppfyller  $x > 6$  är lösningsmängden på  $I_1$ ,  $L_1 = \emptyset$ .

• II. Om  $x \in I_2 = [-2, 2)$  är  $2x-4 < 0$  &  $x+2 \geq 0$ .  
Då är (\*)  ~~$-(2x-4) < x+2$~~

$$\Leftrightarrow -2x+4 < x+2 \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Lösningsmängden  $L_2$  är de  $x \in I_2$  och som uppfyller  $x > \frac{2}{3}$ ,  
dvs.  $L_2 = (\frac{2}{3}, 2)$ .

• III. Om  $x \in I_3 = [2, \infty)$  är  $2x-4 \geq 0$ ,  $x+2 > 0$ .  
Då är (\*)  ~~$2x-4 < x+2$~~   $\Leftrightarrow x < 6$

Lösningsmängd  $L_3$  på  $I_3$  är alltså  $L_3 = [2, 6)$

Lösning till (\*) på  $\mathbb{R}$  ges av

$$x \in L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (\frac{2}{3}, 6)$$