

✓ Föreläsning 5

SF1661 HT 21

10/q - 21

- Ekvationslösning

- Polynom och polynom ekvationer

- Lösning av olikheter

En ekvation är en öppen utsaga

"Lös ekvationen $x^2 - 2x + 1 = 0$ "
betyder

"För vilka värden på x är
det sant att $x^2 - 2x + 1 = 0$?"

En ekvation kan ses som
ett villkor på den/de obekanta.

Example

$$3x + 5 = x - 1$$



$$2x = -6$$

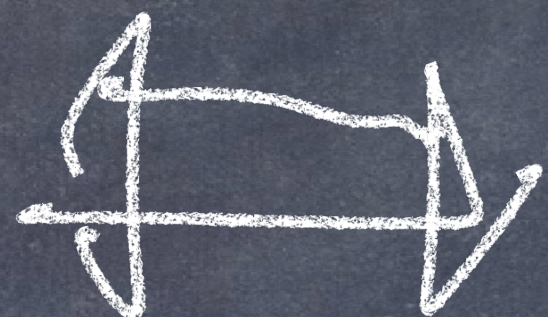


$$x = -3$$

x

Example

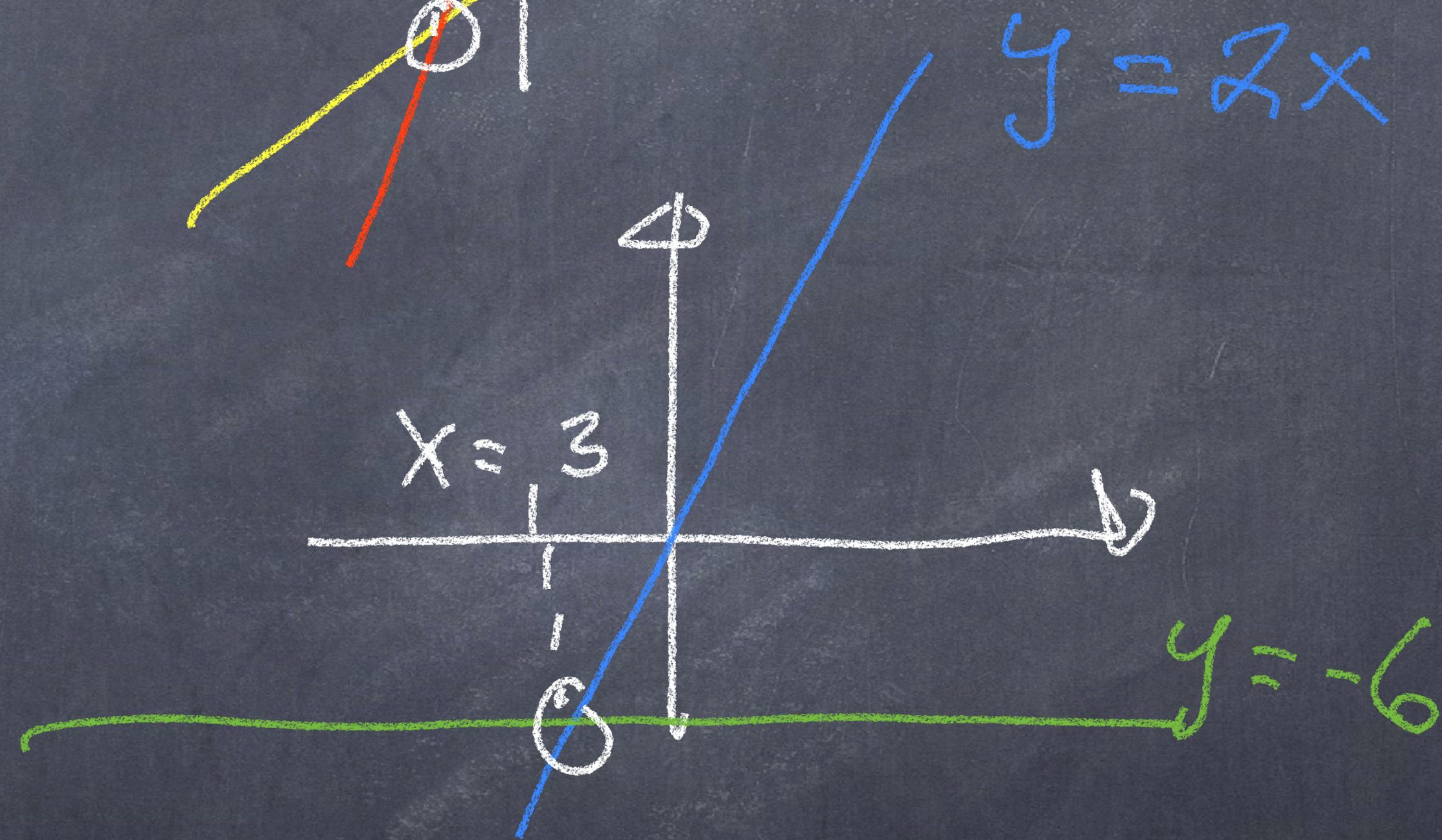
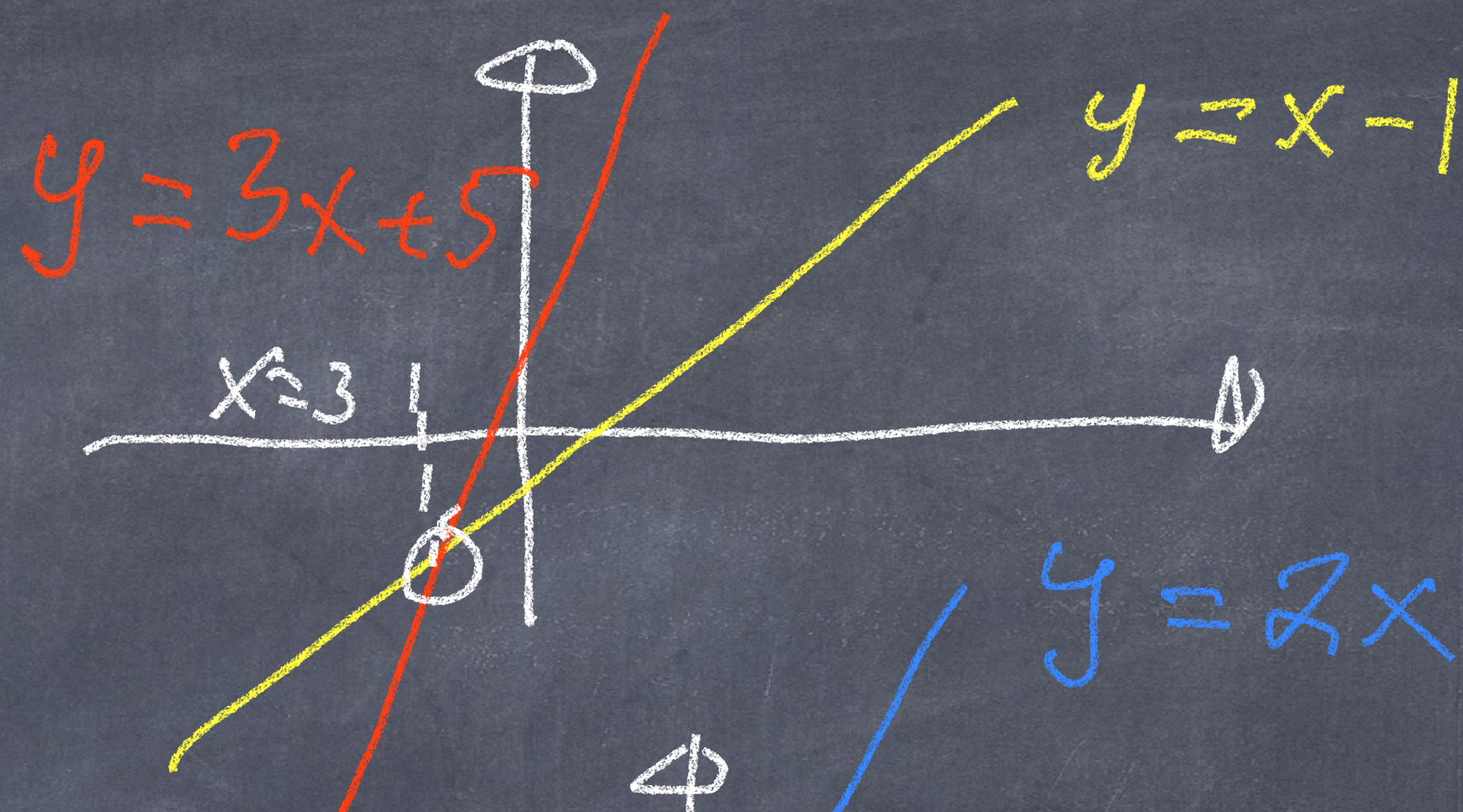
$$3x + 5 = x - 1$$



$$2x = -6$$



$$x = -3$$



$$\sqrt{x+3} = (x+1)$$

$\Rightarrow$ [es äquivalenz!
 p. ge. Quadrierung
 PRÜFUNG LOGISCH
 notwendig]

t.g. $a^2 = b^2$
 ~~$\Rightarrow a = b$~~

$$(x+3) = (x+1)^2$$



Lösung $x^2 + x - 2 = 0$
 $\Rightarrow x = 1$ ✓ $x = -2$

"falsch
 rot"

Prüfung

$x = 1$ ger v.l. $= \sqrt{1+3} = 2$
 H.L. $= (1+1) = 2$

$x = -2$ ger v.l. $= \sqrt{-2+3} = 1$
 H.L. $= -2+1 = -1$

$$\sqrt{x+3} = (x+1)$$

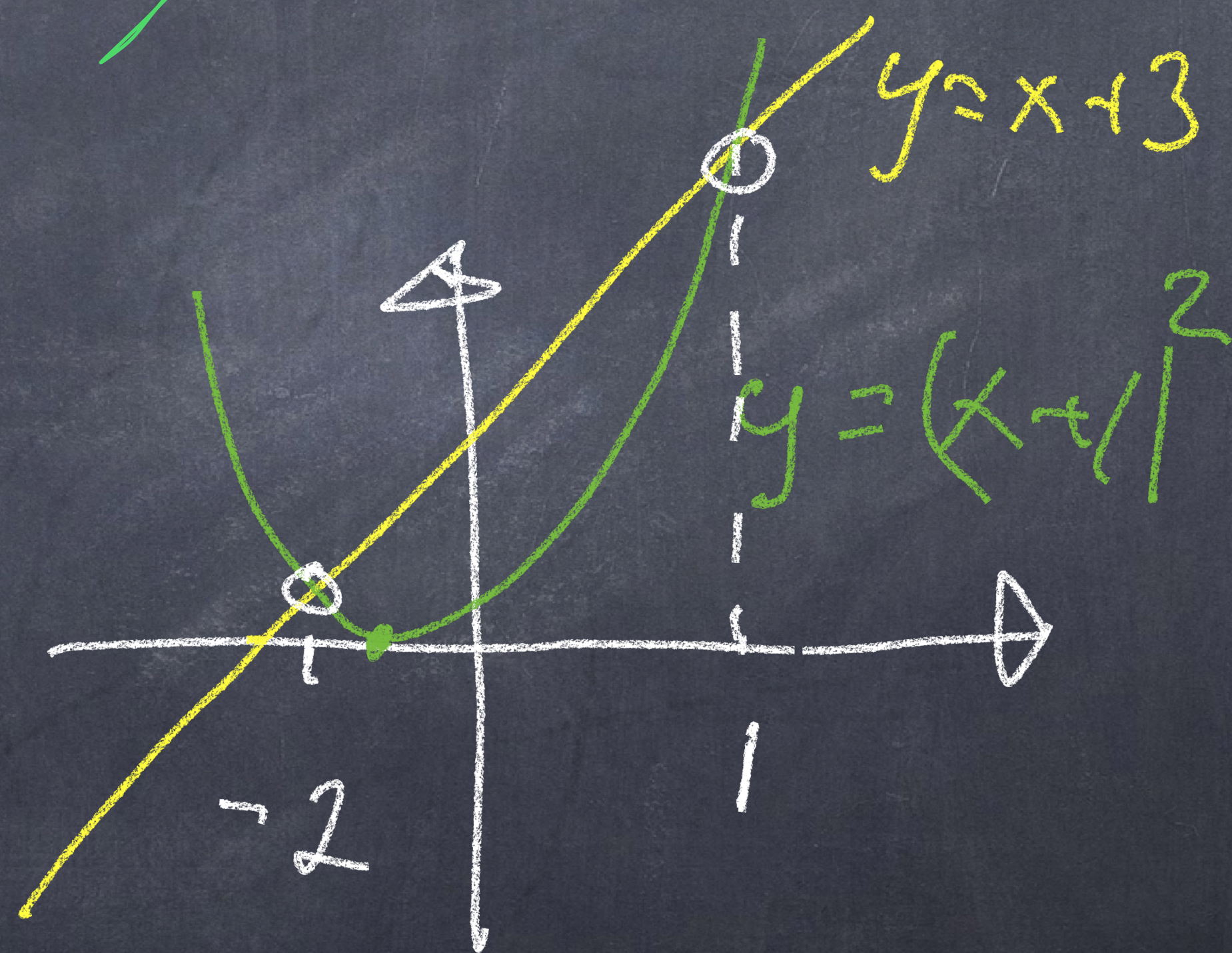
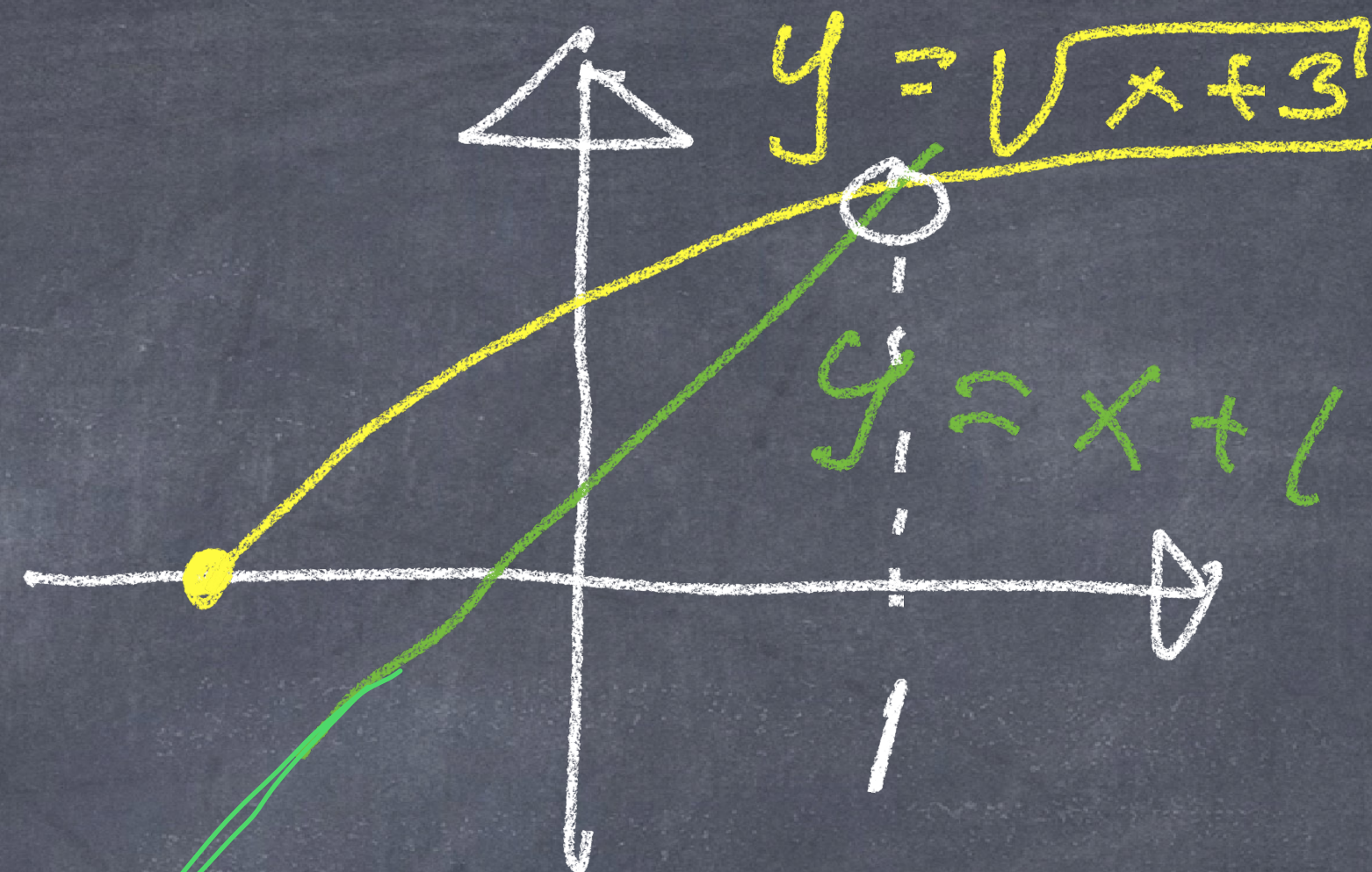


$$(x+3) = (x+1)^2$$



$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$



Andragsgrads equationer

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad \text{Sätt } p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_{\text{}} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Rightarrow (*) \left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \stackrel{(**)}{=} \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a \cdot a}}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$$

$$\Rightarrow (x + \frac{p}{2}) = \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{by} \quad y^2 = A$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{A}$$

(**)

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}} =$$

$$\Rightarrow -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{\sqrt{4}} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Example: LöS $6x^2 + 5x + 1 = 0$

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144} - \frac{24}{144}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{5}{12}\right) = \pm \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{12} \pm \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

oder

$$x = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{S_{UA2}}: x \in \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$$

Enligt Polynom $P(x)$ av grad n

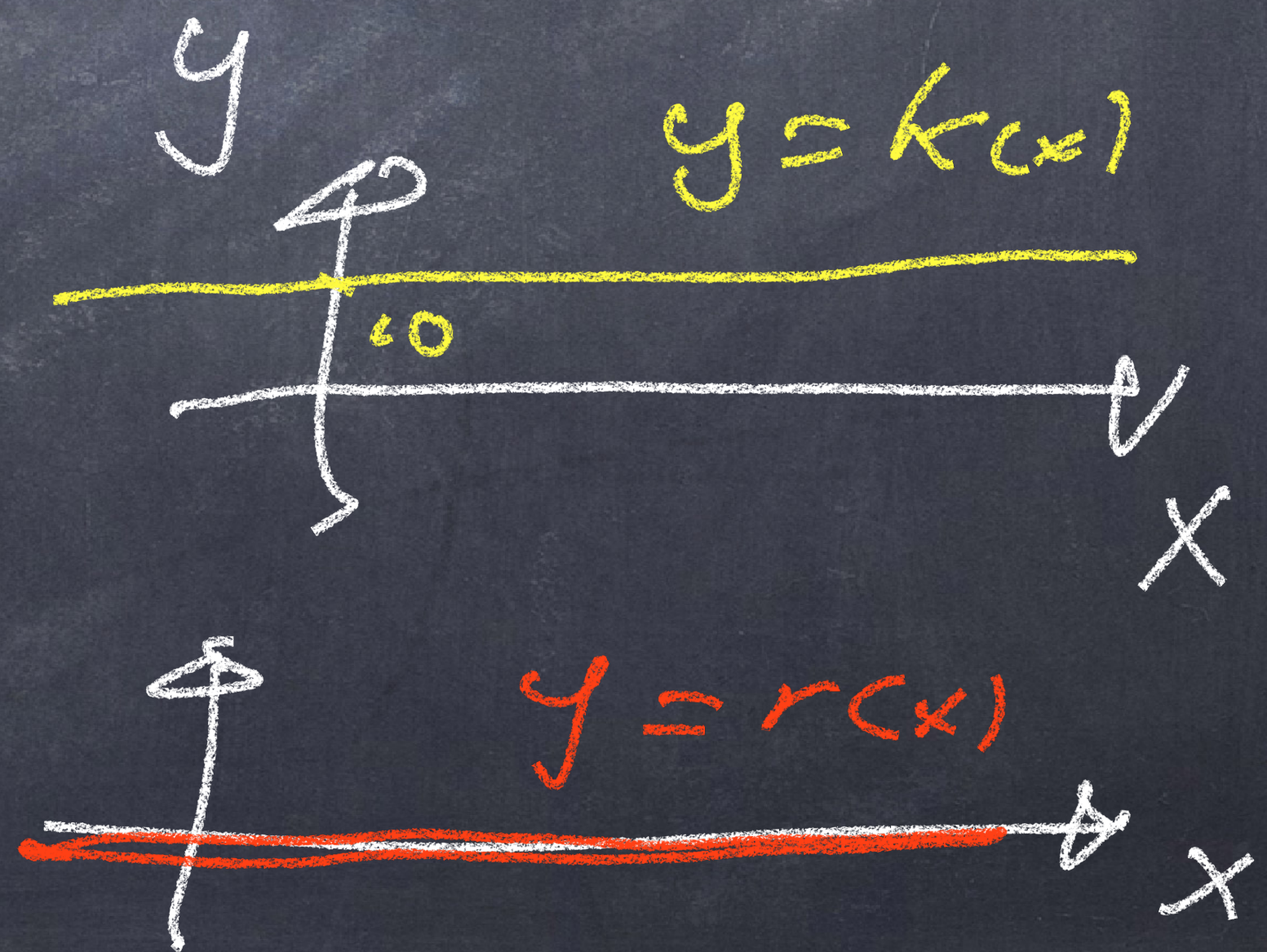
med koefficienter $a_i, i=0, 1, \dots, n, a_n \neq 0$

$$P(x) = \underbrace{a_n x^n}_{\text{ledande term}} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \underbrace{a_1 x}_{\text{linjär term}} + \underbrace{a_0}_{\text{konstant term}}$$

Ex: $q(x) = 10x^3 - \pi x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

ledande term
linjär term
konstant term

polynom	grad
$P(x) = X^{10} - 1$	10
$q(x) = (x-1)(x+2)$	2
$l(x) = 3x - 7$	1
constant polynom $k(x) = 10$	0
nonpolynomial $r(x) = 0$	0 deficient ALT. $-\infty$



Faktorsatsen Låt $p(x)$ vara
ett polynom, $\text{grad } p(x) \geq 1$.

Då gäller följande ekvivalens.

$$p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)q(x)$$

där $q(x)$ är polynom $\text{grad } q = \text{grad } p - 1$

Dvs:

$x=a$ är en lösning till ekvationen $p(x)=0$
OCH $(x-a)$ är en FAKTOR i $p(x)$

Exempel: Låt $p(x) = x^2 + x - 6$

* Visa att ekvationen $p(x) = 0$
har lösningar $x = 2$ och $x = -3$

* Visa att $p(x)$ kan
faktoriseras som

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Division av heltal och av polynom

$$\frac{79}{3} = \overset{\text{KVOT}}{\textcircled{26}} + \frac{\textcircled{1}}{3}$$

REST $\Rightarrow$

$$79 = 3 \cdot 26 + 1$$

$$\textcircled{26} \text{ KVOT}$$

$$79 \overline{) 3}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline \end{array}$$

$$19$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1} \text{ REST}$$

Vad vi faktiskt gör i "Liggande ~~stolen~~"

$$79 = 3 \cdot 20 + 19$$

$$= 3 \cdot 20 + 3 \cdot 6 + 1$$

$$= 3 \cdot (20 + 6) + 1$$

$$= 3 \cdot 26 + 1$$

(*) och i "kortdivision"

$$\frac{2x^3 + x^2 + 4}{x+2}$$

$$x+2$$

$$2x^2 - 3x + 6$$

+

$$\frac{8}{x+2}$$

NOT

$$2x^3 + x^2 + 4$$

$$= (x+2)(2x^2 - 3x + 6) + 8$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 6}{2x^3 + x^2 + 4} \left| x+2 \right.$$

$$-(2x^3 + 4x^2)$$

$$-3x^2 + 4$$

$$-(-3x^2 - 6x)$$

$$6x + 4$$

$$-(6x + 12)$$

$$-8$$

REST

Uppg after polynomial division

$$\begin{array}{r} * \quad x^4 - 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \quad x^5 + x^3 + 1 \\ \hline x^2 + 1 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)} = \frac{(x^2 + 1)(\cancel{x + 1})(x - 1)}{\cancel{(x + 1)}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x^2 + 1)(x - 1)}}$$

$$\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1} = x^3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \\ \hline x^5 + x^3 + 1 & x^2 + 1 \\ -(x^5 + x^3) & \\ \hline & 1 \end{array}$$

SATS (Divisionsalgoritmen för polynom)

Om $f(x)$ och $g(x)$ är polynom av grad ≥ 1 ,
så finns det polynom $q(x)$ och $r(x)$,
grad $r < \text{grad } g$, sådana att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \left(\Rightarrow f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \right)$$

speciellt om $\text{grad } g(x) = 1$ är $r(x) = r$
en konstant, $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r$

• Divisionsalgoritmen för polynom
följer av metoden för att genomföra division

• Jfr Divisionsalgoritmen för heltal

Om m och n är heltal ≥ 0

Så finns heltal q och r , $r < n$,

sådana $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n} \quad (\Leftrightarrow m = n \cdot q + r)$

Exempel: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

Lösning Ser att $x=1$ är en lösning
 $\Rightarrow (x-1)$ är en faktor i V.L.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4 \\
 \hline
 x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x-1 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 0 - 4x + 4 \\
 \underline{-4x + 4} \\
 0
 \end{array}$$

Polynomdivision ger

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 =$$

$$= (x-1)(x^2 - 4)$$

$$\text{Så } x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ eller } x^2 - 4 = 0$$

$$(\text{factors}) \Rightarrow x = 1, x = 2 \quad \vee \quad x = -2.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ouch} \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-2) \end{array} \right)$$

Bevis av FAKTORSATSEN ($p(x)$ polynom)

Vi ska visa att $p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a)q(x)$
Polynom

Vi gör det genom att visa
implikationen i bägge riktningarna

($\implies$) Antag att $p(x) = (x-a)q(x)$

Då är

$$p(a) = (a-a)q(a) = 0 \cdot q(a) = 0$$

($\Rightarrow$) Antag att $p(a) = 0$.

Vi dividerar $p(x)$ med $(x-a)$

Enligt divisionsalgoritmen finns
ett polynom $q(x)$ och en konstant r
sådana att

$$p(x) = (x-a)q(x) + r$$

Om vi sätter $x=a$ fås

$$0 = p(a) = \underbrace{(a-a)q(a)}_{=0} + r = r$$

Så $r=0$
och

$$\underline{p(x) = (x-a)q(x)}$$

Sats: Låt $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
vara ett polynom med heltalskoefficienter,
dvs $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Om ekvationen $p(x) = 0$ har
en rationell lösning $\frac{s}{t}$

(dvs $s, t \in \mathbb{Z}$, $p(\frac{s}{t}) = 0$) $\leftarrow$ så måste
 s dela a_0 och t dela a_n

(Se uppgift 2.2:4 samt AIE sid 55)

Exempel: Lös $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

Antag att ekvationen har en lösning

$\frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$. I så fall måste, enl.

föregående sats, $s \mid -1$ och $t \mid 2$

dvs $s = \pm 1$ och $t = \pm 1, \pm 2$, så

$\frac{s}{t} = \pm 1$ eller $\pm \frac{1}{2}$.

Prövning ger $p(\frac{1}{2}) = 0$, $x = \frac{1}{2}$ en lösning

(forts.) En faktorsetsen är då
 $(x - \frac{1}{2})$ en faktor i $2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right) =$$

polynom
 $\Rightarrow$ $2(x^2 + 1) \left(x - \frac{1}{2} \right)$

division

så $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 1) \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0$

så har $x = \frac{1}{2}$ som enda reella lösning
och dessutom två komplexa $x = i$ och $x = -i$.

Olikheter

Låt a, b och k vara reella tal.

Då gäller att

$$(i) \ a < b \quad \Leftrightarrow \quad a+k < b+k$$

$$(ii) \ a < b \quad \Leftrightarrow \quad ak < bk, \quad k > 0$$

$$(iii) \ a < b \quad \Leftrightarrow \quad ak > bk, \quad k < 0$$

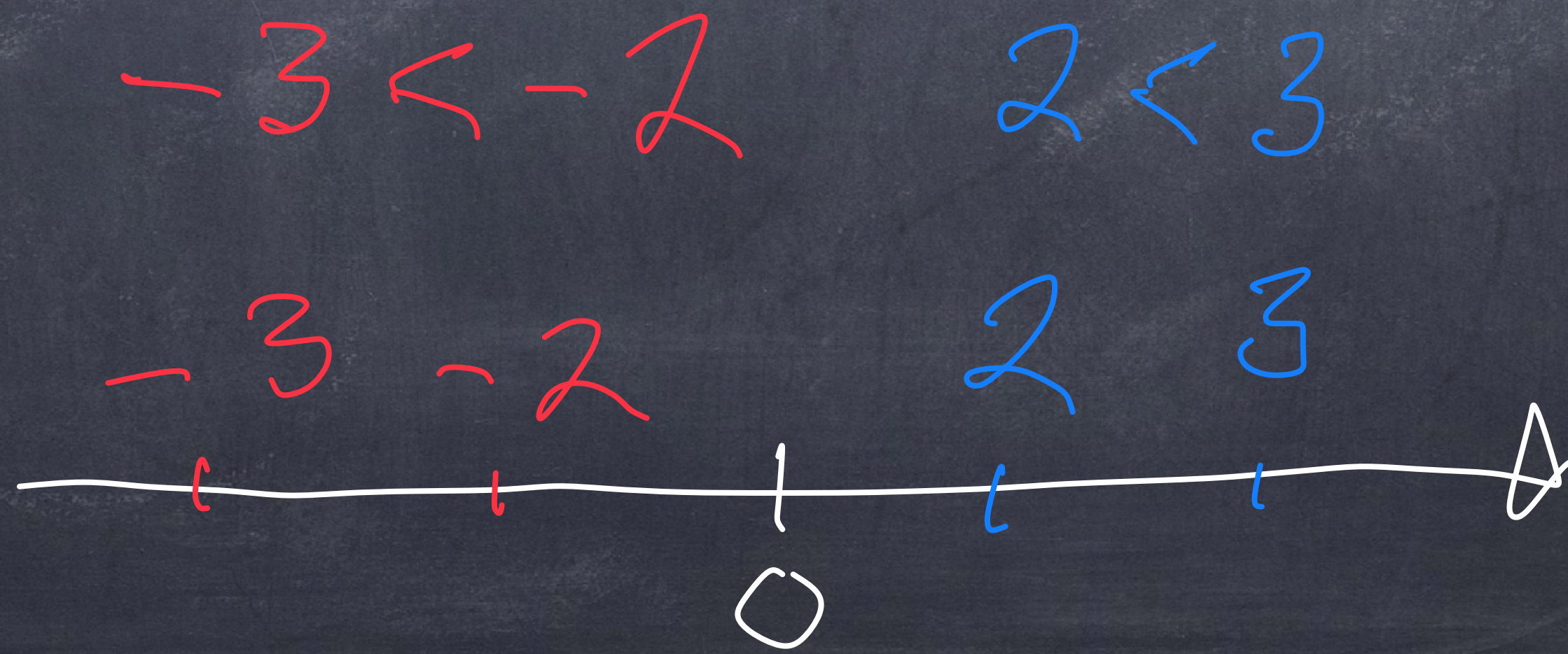
Bevis (iii)

$$a < b \iff (b-a) > 0 \overset{\text{om}}{\iff} k(b-a) < 0$$

$k < 0$

$$\iff kb - ka < 0 \iff kb < ka \quad \text{U.S.B.}$$

Exempel:



Lösung an Ungleichung

Ex: $x^2 \geq \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

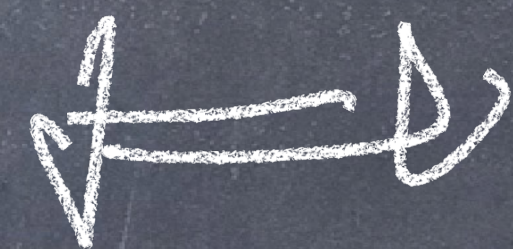
$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \geq 0 \quad (*)$

Faktorisieren v.l.

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$$

so $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = (x-3)(x+\frac{1}{2})$

so $(*)$



$$(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$$

$(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$ Studeras med teckentabell

	$-\frac{1}{2}$	3	x
$(x-3)$	-	0	+
$(x+\frac{1}{2})$	0	+	+
$(x-3)(x+\frac{1}{2})$	+	0	+

Slutsats:

$$(x-3)(x+\frac{1}{2}) \geq 0$$

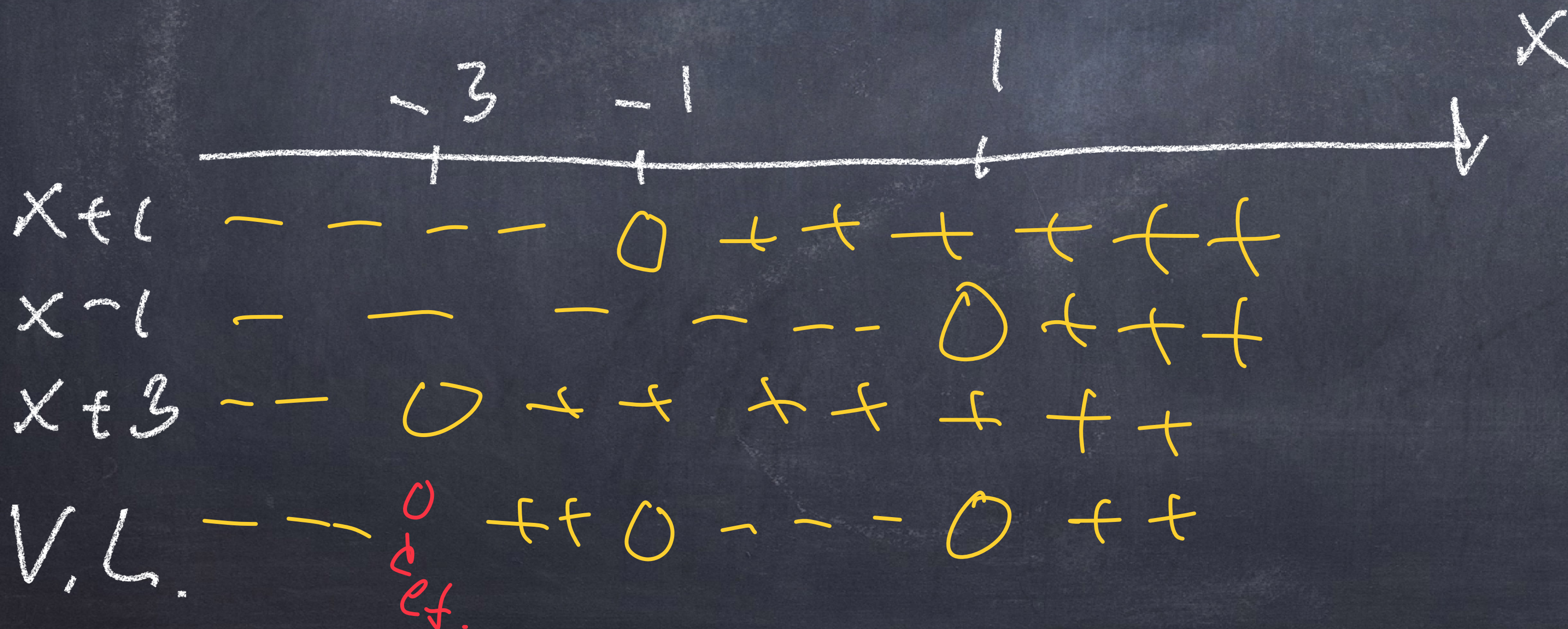
$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 3$$

SVAR:

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [3, \infty)$$

Ex: $\frac{x^2 - 1}{x + 3} > 0$

$\Downarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)} > 0$



Soln:

$x \in (-3, -1) \cup (1, \infty)$

Ex (Ex 2.3:2, MA sid 55)

$$\frac{1}{1+x} < 1-x$$

~~A~~
var för².

$$1 < (1-x)(1+x)$$

1 MA löser man med faktappdelning

Alternativ metod (bättre! (2))

$$\frac{1}{x+1} < 1-x$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x+1} - (1-x) < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{x+1} + (x-1) < 0$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1 + x^2 - 1}{(x+1)} < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2}{x+1} < 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x+1 < 0$$

$$(\text{eg } x^2 \geq 0$$

$$\forall x)$$

Svar:

$$x < -1$$

Lös $\sqrt{x+2} < x$: OBS: $0 \leq \sqrt{x+2} < x$

så alla lösningar måste uppfylla $x > 0$.

Om $x > 0$ så

$$\sqrt{x+2} < x$$

$$\Leftrightarrow (x+2) < x^2, x > 0$$

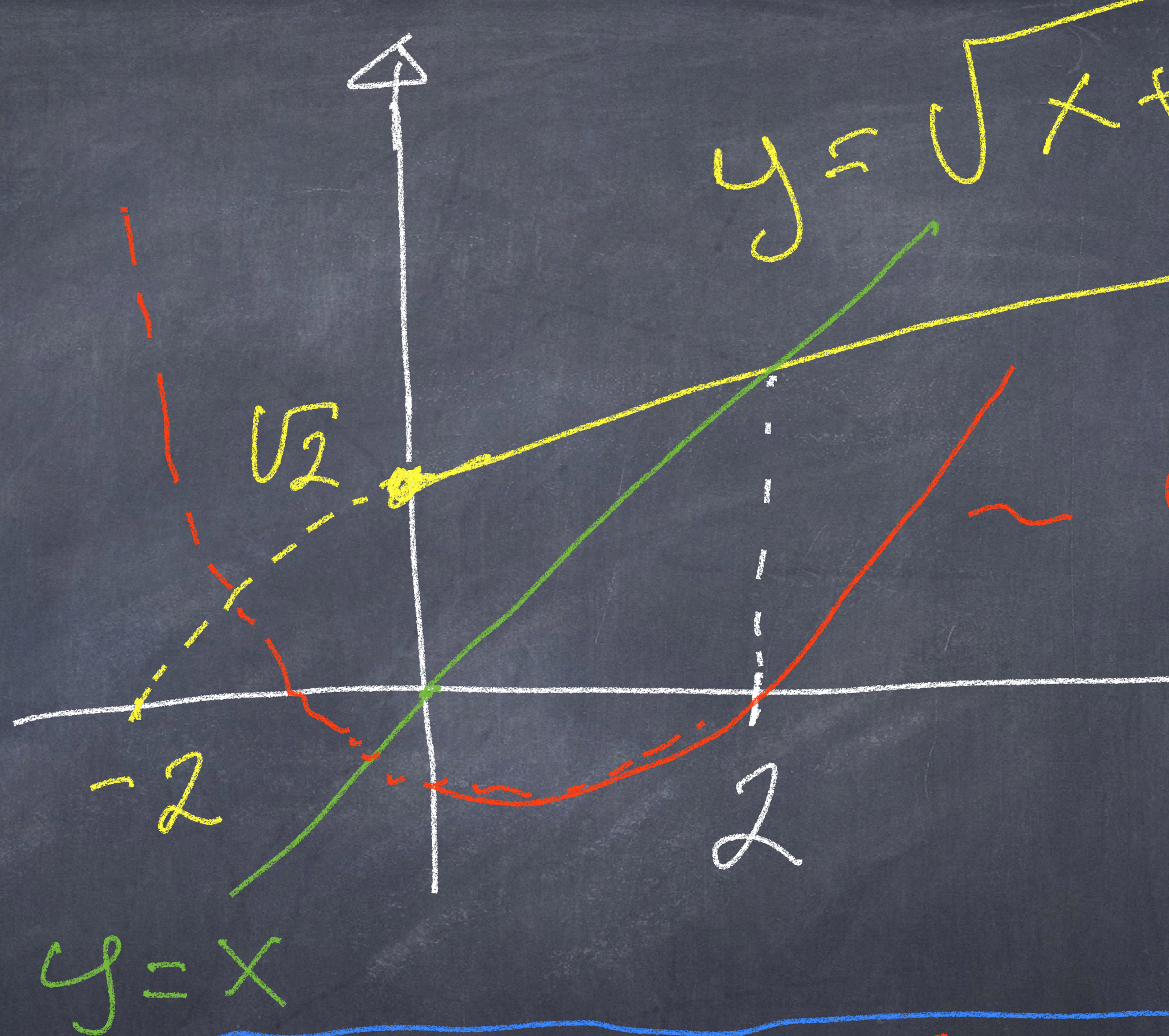
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x > 2 \vee x < -1) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

↑
Eg om $a, b > 0$
så $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$



$$\boxed{\sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0}$$