

Föreläsning 4

SF1661 HT 21

8/9

Aritmetik
i $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Q}$

Från

$\mathbb{Q}$

till

$\mathbb{R}$

Varför räknar vi
som vi gör?

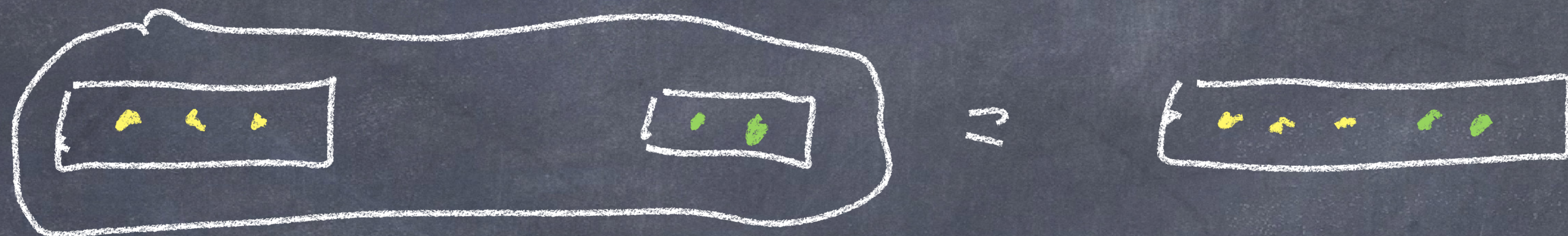
$$(-1) \cdot (-1) = +1$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

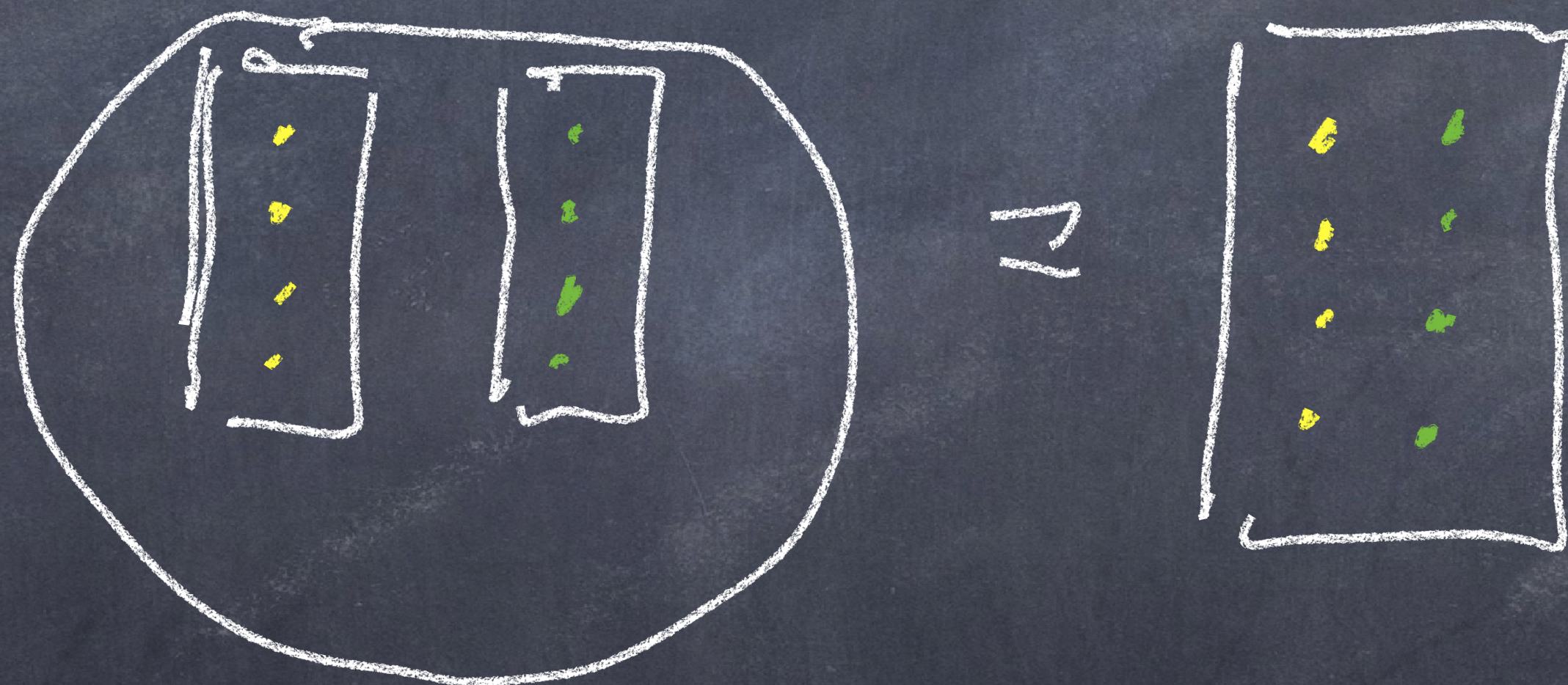
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Modell för addition & multiplikation i $\mathbb{N}$.

3+2:



2 · 4



ger följande "naturliga" egenskaper

SATS A: Om m, n och p är
naturliga tal så gäller att

(1) $n + m = m + n$ (kommutativa lagen för add.)

(2) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativ lagen för add.)

(3) $n \cdot m = m \cdot n$ (kommutativa lagen för mult.)

(4) $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associativa lagen för mult.)

(5) $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ (1 är multiplikativt enhetselement)

(6) $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ (distributiva lagen:
multiplikation distribuerar
över addition)

De hela talen, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

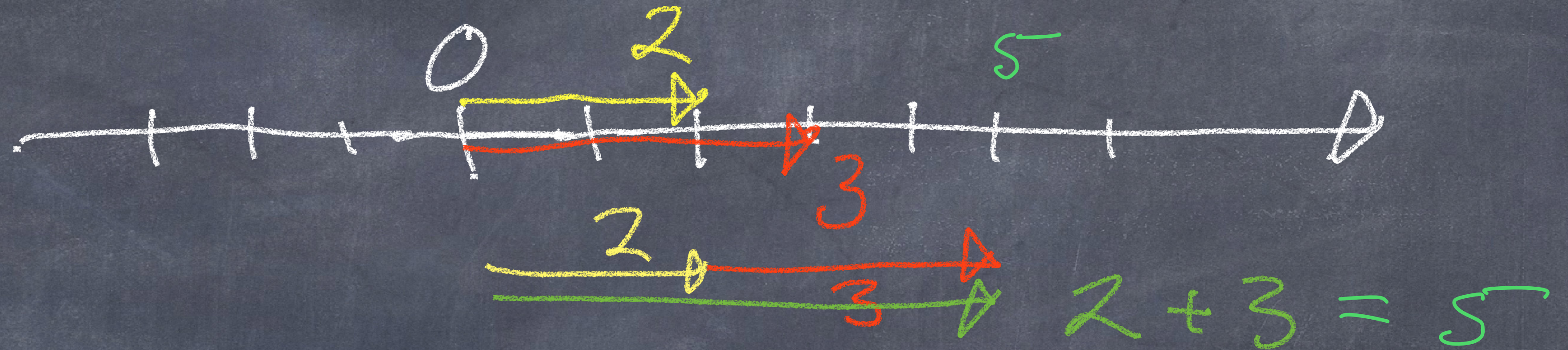
Definition av 0: $0 + n = n + 0$

Def. av negativa tal: För varje $m \in \mathbb{N}$
inför vi $(-m)$ s.a. $m + (-m) = 0$

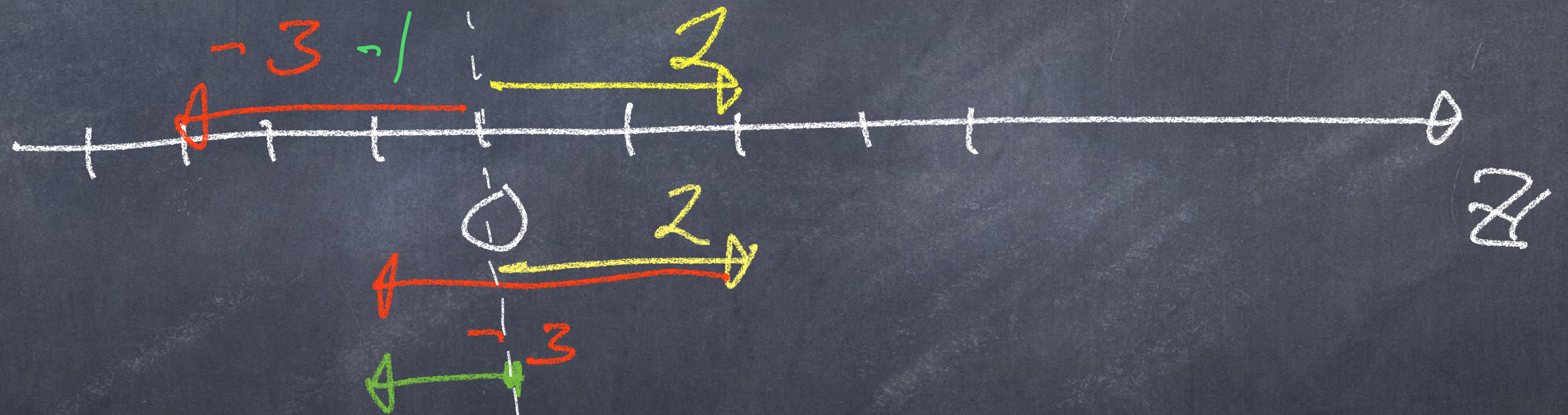


Modell för addition & subtraktion

$$2 + 3$$



$$2 + (-3)$$



$$2 - 3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + (-3)$$

$$2 + (-3) = -1$$

Multiplikation i $\mathbb{Z}$

$$2 \cdot (-3) = -6$$

$$(-2) \cdot (3) = -6$$

$$(-2) \cdot (-3) = 6$$

$$0 \cdot n = 0$$

Vill ha multiplikation
som är

- användbar

(tillämpbar)

- "naturlig"

(Sats A)

Om vi kräver att Sats A ska gälla så
måste

$$\# \quad 1 \cdot (-1) \stackrel{\text{enl}}{=} (-1) \cdot 1 \stackrel{\text{enl}}{=} (-1)$$

$A:3 \qquad A:5$

Följer i så fall att

$$(-1) \cdot n = (-1) \cdot (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ st}}) \stackrel{\text{enl}}{=} \underbrace{AG}$$

$$= ((-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \dots + (-1) \cdot 1) = \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{n \text{ st}} = -n$$

och att

$$(-m) \cdot n \stackrel{\text{enl.}}{=} \underbrace{ovan} (-1) \cdot m \cdot n \stackrel{\text{enl}}{=} \underbrace{A4} (-1) (m \cdot n) \stackrel{\text{enl}}{=} \underbrace{ovan} -mn$$

$$* \quad 0 \cdot 1 \stackrel{\text{enl}}{=} 1 \cdot 0 \stackrel{\text{enl}}{=} 0$$

A:3 AS

Det följer då också att

$$* \quad 0 \cdot n = 0(1 + 1 + \dots + 1) \stackrel{\text{enl}}{=}_{A6} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 1$$

$$\stackrel{\text{enl}}{=} 0 + 0 + \dots + 0 \stackrel{\text{enl}}{=} 0$$

ovan def. av 0

$\forall i$ definierar därför för $n, m \in \mathbb{N}$

$$(-n) \cdot (m) = (n) \cdot (-m) \stackrel{\text{def}}{=} -(n \cdot m)$$

$$0 \cdot n = n \cdot 0 = 0 \cdot (-n) = (-n) \cdot 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$(-n) \cdot (-m) = ?$

speciellt $(-1) \cdot (-1) = ?$

$$\text{Sätt } (-1) \cdot (-1) = X.$$

$$X - 1 = (-1) \cdot (-1) - 1 =$$

$$\stackrel{\text{enl}}{=} (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \stackrel{\text{enl}}{=} \underset{\text{ovan}}{AG}$$

$$= (-1) \cdot ((-1) + 1) = (-1) \cdot 0 \stackrel{\text{enl}}{=} \underset{\text{ovan}}{0}$$

$$\text{Så } X - 1 = 0, \text{ dvs } X = 1$$

$$\text{dvs } (-1) \cdot (-1) = 1$$

Vä definierar därför

$$(-1) \cdot (-1) \stackrel{\text{def.}}{=} 1$$

$$(-n) \cdot (-m) \stackrel{\text{def.}}{=} n \cdot m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

OBS: Multiplikation med (-1)
 motsvarar rotation 180°



Def: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$, (de rationella talen)

där $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ OMM $n \cdot q = m \cdot p$

Obs: Villkoret $n \cdot q = m \cdot p$ Getyter

precis $\forall k$

$$\frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{k \cdot m}$$

alla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Exempel.

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$$

by

$$2 \cdot 21 = 42 = 3 \cdot 14$$

eller

$$\left(\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{14}{21} \right)$$

$$\frac{5}{8} \neq \frac{21}{32}$$

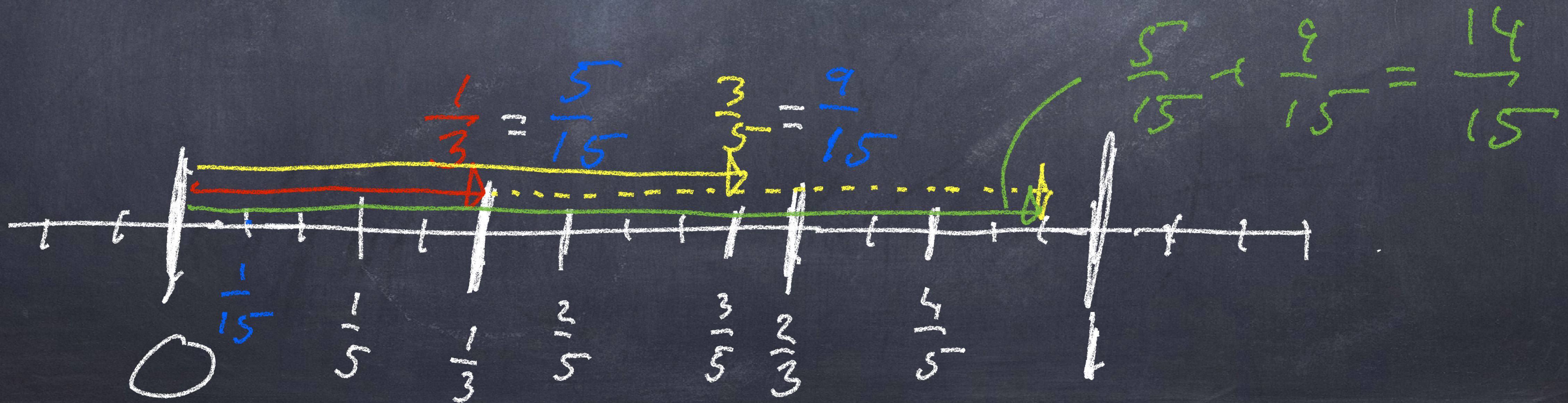
by

$$5 \cdot 32 = 160$$

$$8 \cdot 21 = 168 \neq 5 \cdot 32$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Ex: $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{15} + \frac{9}{15} = \frac{14}{15}$



Beräkna

$$\cdot \quad \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{28 - 3}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\cdot \quad \frac{11}{340} + \frac{7}{360} = \frac{11 \cdot 360 + 7 \cdot 340}{340 \cdot 360}$$

..... men enkla med MGM
(Minsta Gemensamma Multiplik)

$$\underline{MGM(340, 360)}$$

$$340 = 34 \cdot 10 = 2 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{5} \cdot \underline{17}$$

$$360 = 36 \cdot 10 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{5}$$

$$MGM(340, 360) = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{5} \cdot \underline{17}$$

$$= 360 \cdot 17 = 340 \cdot 18 = 6120$$

$$\frac{11}{340} + \frac{7}{360} = \frac{11 \cdot 18}{340 \cdot 18} + \frac{7 \cdot 17}{360 \cdot 17} = \frac{198 + 119}{6120} = \frac{317}{6120}$$

Multiplication in $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

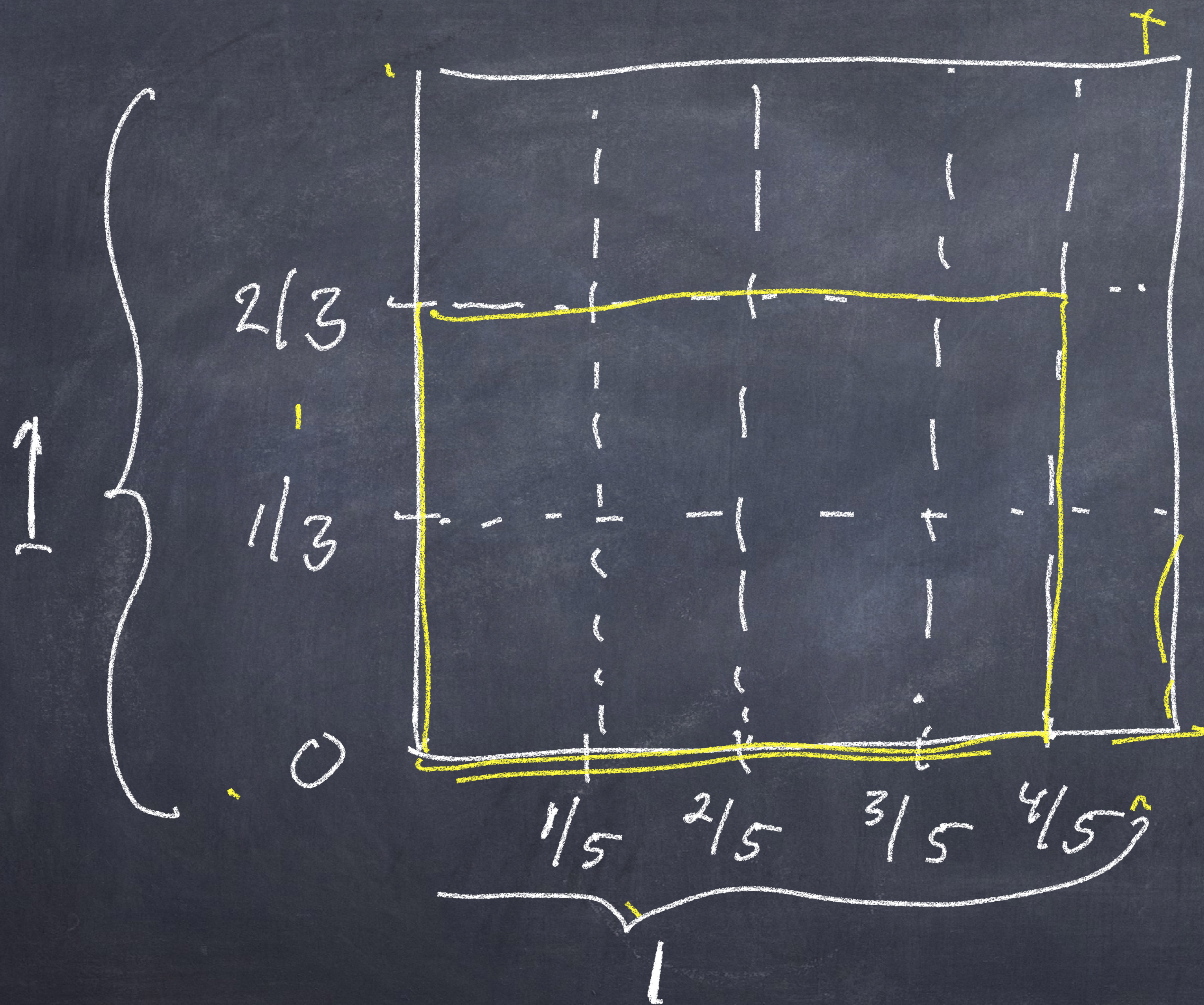
Multiplication in $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2$$

"vill ha" area kolknig -



$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \\
 & \text{Area}(\boxed{}) \\
 & = \text{Andel av } \boxed{1} \\
 & = \frac{\text{Antal ruter}}{\text{Totalt antal ruter}} \\
 & = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}
 \end{aligned}$$

Division i $\mathbb{Q}$

Om $\frac{m}{n}$ och $\frac{p}{q}$ är rationella tal, $\frac{p}{q} \neq 0$,
så definierar vi

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Motivering:

$0 \leq \frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$ är ett rationellt tal

så gäller för alla $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{\frac{m}{n} \cdot k}{\frac{p}{q} \cdot k} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sätt} \\ k = nq \end{array} \right\} = \frac{\cancel{\frac{m}{n}} \cdot \cancel{n} q}{\frac{p}{q} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{q}} = \frac{mq}{np}$$

Beräkna $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Förenkla $\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}$

$$a^2 - b^2$$

$$ab$$

$$a - b$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} \\
 \hline
 \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}
 \end{array}
 =
 \frac{\frac{14}{12}}{\frac{75}{8}}
 =
 \frac{\frac{14}{12} \cdot \frac{2}{2}}{\frac{75}{8}}
 =
 \frac{28}{45}$$

$$\frac{\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}}{\frac{ab}{a - b}} = \frac{(a^2b + ab^2)}{(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(a - b)}{ab}$$

$$= \frac{ab(a + b)(a - b)}{(a + b)(a - b)ab} = 1$$

Obs:

$$\frac{\left(\frac{r}{s}\right)}{t} \neq \left(\frac{\frac{r}{s}}{t}\right),$$

Division of
association

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

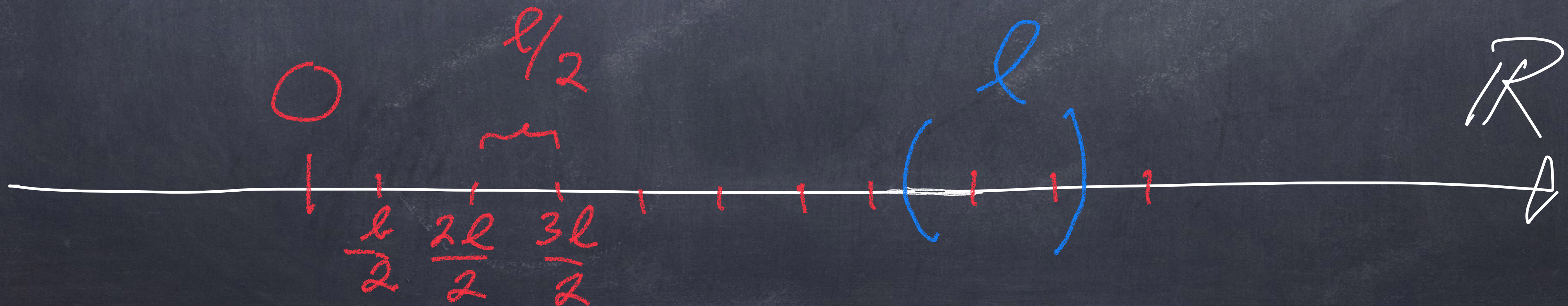
$$\text{Men } \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Ge en Folksam till

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

"Min vespa drar
1/2 l bensin / mil,
och jag har 9/5 l
i tanken. Hur långt
räcker bensinen?"

De rationella talen $\mathbb{Q}$
är täta på talaxeln,
dvs. varje intervall på talaxeln,
har liksom det är, oändligt
rationella tal.



Men det finns punkter på
talaxeln som inte beskrivs av
rationella tal. T.ex.

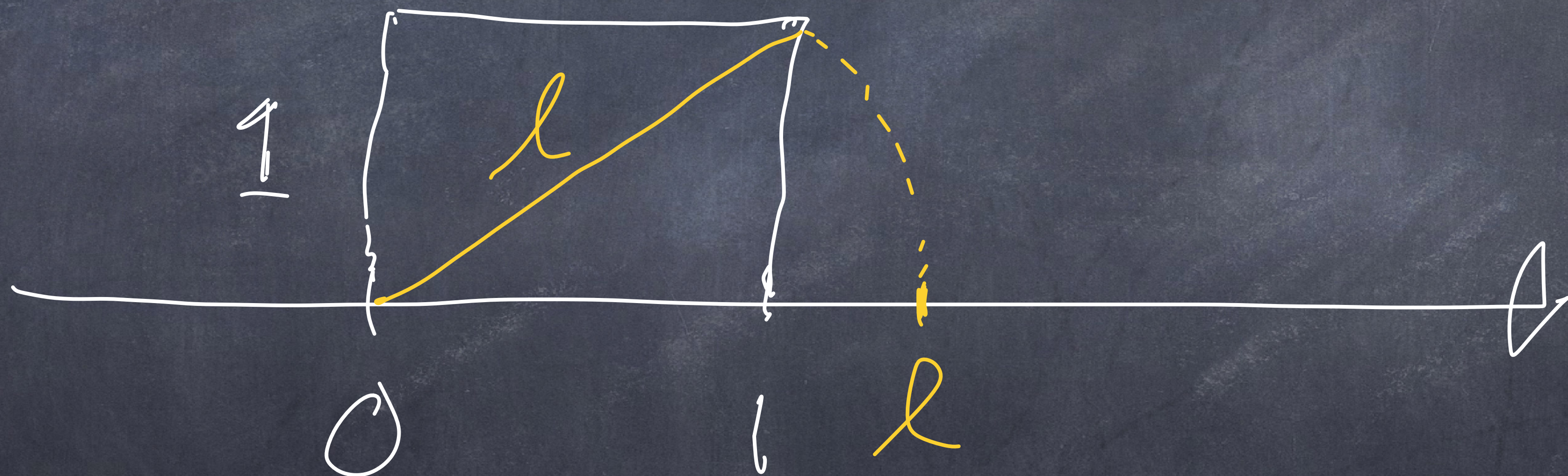
SATS: Det finns något $r \in \mathbb{Q}$

sådant att $r^2 = 2$

dvs. $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal.

Tablet l s.a. $l^2 = 2$
(dvs $l = \sqrt{2}$) liegen pa^c falschen

$$l^2 = 1^2 + 1^2, \text{ dvs } l^2 = 2.$$



Antag att motsatsen, dvs anta att det finns $r \in \mathbb{Q}$ s.a. $r^2 = 2$.

Skriv $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ utan gemensam faktor, dvs $\frac{p}{q}$ förkortat så långt det går.

1 så fall skulle gälla att:

— θ

$$r^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \underline{p^2 = 2q^2}$$

$$\Rightarrow 2 \mid H.L. \Rightarrow 2 \mid V.L. = p^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid p \quad (\text{Eg om } p \text{ ej innehåller faktor 2, gör ej heller } p^2 \text{ det})$$

$$\Rightarrow p = 2n, n \in \mathbb{N}.$$

Vi sätter in $p = 2n$ i $p^2 = 2q^2$:

$$(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid q \quad (\text{med samma resonering som ovan})$$

Vårt antag att $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ där

$p, q \in \mathbb{N}$ saknade gemensam faktor.

$$\Rightarrow \underline{2 \mid p} \geq \underline{2 \mid q}$$

Mod sägelse! Vårt antagande
måske ha varit fel!

Alltså finns inget $r \in \mathbb{Q}$
sådant att $r^2 = 2$.

Def fems många irrationella

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

(Om $n \in \mathbb{N}$, så $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$)

$\pi, e, \dots$

$\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
= "Mängden av alla irrationella tal"

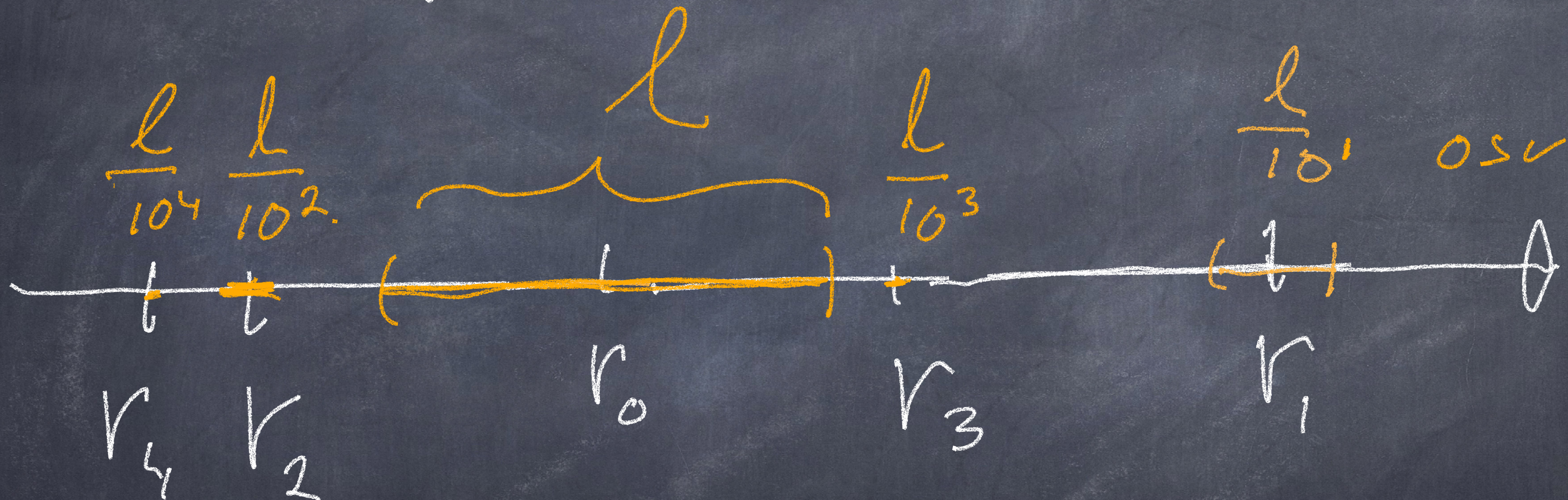
Bonus bilder om
mängderna $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
som delmängder av $\mathbb{R}$

Examineras ej

• De rationella talen $\mathbb{Q}$
är en uppräknelig mängd, dvs
de har samma kardinalitet som
de naturliga talen

• De irrationella talen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
är en överuppräknelig mängd

Låt $r_0, r_1, r_2, \dots$ vara en approximation av Q . Vi kan "täcka över" Q med interval



$$L = l + \frac{l}{10} + \frac{l}{10^2} + \dots = l \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right)$$

$$L = l \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right)$$

$$= l \cdot 1.11111\dots$$

Vi kan välja l hur litet som helst,
och följaktligen få L hur litet som
helst.

VI KAN TÄCKA ÖVER ALLA
RATJONELLA TAL MED INTERVALL VARS
SAMMANLAGDA LÄNGD $\leq$ ÄR
HUR LITEN SOM HELST.

(En konsekvens av upräknelighet)

Man säger att mängden $\mathbb{Q}$
har MÄTT NOLL

- Varje delintervall av talaxeln $\mathbb{R}$ innehåller såväl rationella som irrationella tal, dvs Gäbde $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är täta i $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ är en uppräknelig mängd och har som konsekvens "MÅTT NOLL"

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är en överuppräknelig mängd, och har "FULLT MÅTT"