

Föreläsning 3

SF1001 HT21, 2/9

LOGIK

Logiska symboler

Logiska resonemang

Logik —

samband mellan **utsagor** (påståenden)

Ex

$$x \geq 2$$



$$x^2 \geq 4$$

$$x^2 \geq 4$$



$$x \geq 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$



$$x = 3 \vee x = 1$$

Utsagor har ett sanningsvärde

dvs de är SANNA eller FALSKA

* Malmö' är Sveriges huvudstad FALSK

* Stockholm är Sveriges huvudstad SANN

* Stockholm EO UTSAGA

* Stockholm eller Malmö' EO UTSAGA

• Det finns oändligt många primtal S

• $1+1=3$ F

• $a^2 - 2ab + b^2$ FO UTSAGA

• $\int_0^1 x^2 dx$ FO UTSAGA

• $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ SANN

"Det finns oändligt många primtalstallingar"

UTSAGA SOM VI
INTE VET OM DET
ÄR SANN ELLER FALSK

Slutna utsagor: Beror ej på variabel,
har ett fixt sanningsvärde, S eller F

Ex: $1 < 3$, $\overline{11} = 4$

¹¹
Öppna utsagor: Sanningsvärdet beror
av en variabel i utsagan

Ex: $x^2 = 1$, $x^3 - 1 < 4$

Utsagor? Öppna/slutna? Sanna/Falsa?

$$x^2 - 2x + 1 \quad \text{För utsaga}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ÖPPEN, SANN } x=1.$$

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \text{ÖPPEN, SANN } x \neq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 2$$

FÖRENKLAS TILL

$1 = 2$, SLUTEN OCH FALSK.

Implikation $\Rightarrow$

- Används mellan två utsagor

Exempel:

$$x=1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Läses som

"Om $x=1$ så är $x^2 - 3x + 2 = 0$ "

eller

" $x=1$ implikerar att $x^2 - 3x + 2 = 0$ "
med för

$$x=1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

kan också läsas ut som

" $x=1$ är ett tillräckligt villkor
för $x^2 - 3x + 2 = 0$ "

eller

" $x^2 - 3x + 2 = 0$ är ett

nödvändigt villkor för $x=1$ "

Om P och Q är utsagor

är $P \Rightarrow Q$ en ny utsaga

"Om P är sann så är Q sann"

$P \Rightarrow Q$ är en
ÖPPEN utsaga

Sanningsvärdestabell

P	Q	$P \Rightarrow Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Vilka av följande är sanna implikationer?

• $x = 2 \Rightarrow x^2 = 5$ F

• $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ S

• $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ F

• $x^2 = 4 \Rightarrow$ 2 eller -2

• $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ eller $x = -2$ S

FÖR
UTSÅG
NONSEN!

Mycket vanligt MISSbruk av
" $\Rightarrow$ " vid förenklingar/beräkningar:

$$\int_0^1 x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

SKRIV 0

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) \Rightarrow (x^4-1)$$

Ekvivalens $\Leftrightarrow$

Om P och Q är utsagor sådana att

$P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$, så sägs

P och Q vara **ekvivalenta**

$$P \Leftrightarrow Q$$

Exempel $2x = 10 \iff x = 5$

" $2x = 10$ är ekvivalent med att $x = 5$ "

" $2x = 10$ om och endast om $x = 5$ "
OMM (eng IFF)

" $2x = 10$ är ett nödvändigt och
tillräckligt villkor för $x = 5$ "

$P \leftrightarrow Q$ är en öppen utsaga

Sanningsvärdestabell

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	S

Vilka av följande ekvivalenser är sanna?

• $x = 2 \iff x^2 = 4$ F

• $x = 2 \iff x^3 = 8$ S

• $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}$ F

• $e^x = 1 \iff x = 0$ S

Exempel: Lös ekvationen $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(x+1)^2 - 1 - 3 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(x+1)^2 = 4$$

$\Leftrightarrow$

$$x+1 = 2 \text{ eller } x+1 = -2$$

$\Leftrightarrow$

$$x = 1 \text{ eller } x = -3$$

Ex: Lös ekvationen $\sqrt{3-2x} = x$

$$\sqrt{3-2x} = x$$



$$3-2x = x^2$$

$$\iff x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\iff x = 1 \text{ eller } x = -3$$

OBS!

$$\left[A = B \xrightarrow{\quad} A^2 = B^2 \right]$$

PRÖVNING LOGISKT
NÖDVÄNDIG

$$x = 1 \quad G \in \mathbb{R}$$

$$V.L. = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$$

$$H.L. = 1 = V.L. \quad \text{SÅ } x = 1$$

ÄR EN LÖSNING

$$x = -3 \quad G \in \mathbb{R} \quad V.L. = \sqrt{3-2(-3)} = \sqrt{9} = 3$$

$$H.L. = -3 \neq V.L. \quad x = -3 \quad \underline{\text{ÄR}} \text{ LÖSNING}$$

Negation

Exempel: Om P är utsagan

" $X = 1$ " är $\neg P$ ("icke P ")

utsagan

" $X \neq 1$ "

$\neg P$ är en sanningsvärdhetstabell
ny utsaga

P	$\neg P$
S	F
F	S

$$\frac{P}{x=1}$$

$$x > 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$Z \neq 0$$

$$\frac{\neg P}{x \neq 1}$$

$$x \leq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 \neq 0$$

$$Z = 0$$

Logikens "och" & "eller"

$P \wedge Q$ "P och Q"

sant om både P och Q sanna

$P \wedge Q$ är en

logisk utsaga

sanningsvärdetabel

P	Q	$P \wedge Q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

$P \vee Q$ "P eller Q"

sant om minst en av P eller Q
är sanna.

Sanningsvärdestabell

P	Q	$P \vee Q$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

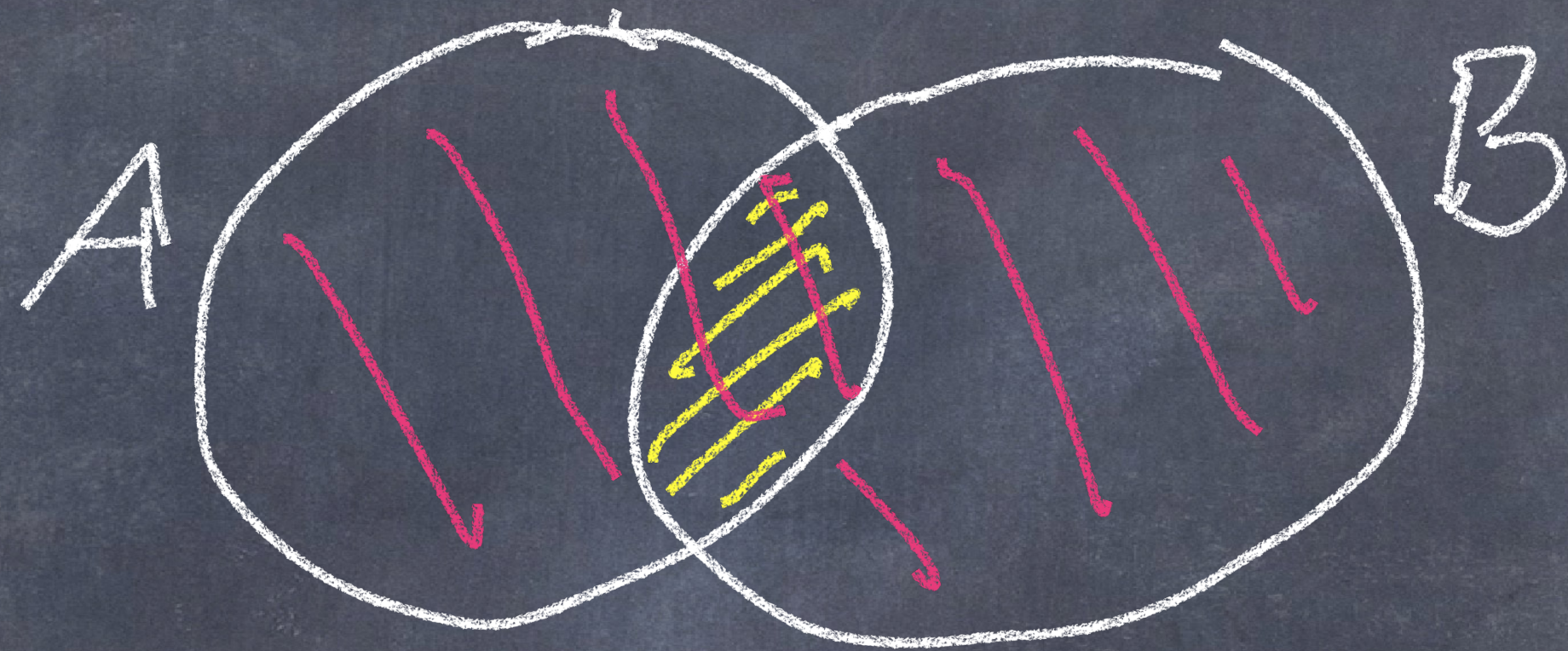
$$\bullet \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad [x = 2 \vee x = -2]$$

$$\bullet \quad [x^2 = 4 \wedge x \geq 0] \Leftrightarrow x = 2$$

$$\bullet \quad [x \geq 1 \vee x \leq -1]$$

$$\Leftrightarrow [-1 < x < 1]$$

$$[x \in A \wedge x \in B] \iff x \in A \cap B$$



$$[x \in A \vee x \in B] \iff x \in A \cup B$$

Kvantifikatorer

✓ "för alla"

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \sin n\pi = 0$$

$\exists$

"det existerar"

$$\exists x \in [0, 1], \quad 2x = 1$$

$\nexists$

"det existerar inte"

$$\nexists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq 0$$

Kvantifikatorer & negationer

Om P är påstående

"Alla katter har svans"

Vad är $\neg P$?

"Det finns (minst) en
katt utan svans"

Om Q är påstående t

"Det finns (minst en katt
utan svans"

Vad är $\neg Q$?

"Alla katter har svans"

Låt G vara Goldbach's förmodan

Alla jämna tal större än två
kan skrivas som summan
av två primtal

Vad är då $\neg G$, Negationen till G :

Det finns ett jämnt tal > 2
som ej kan skrivas som summan
av två primtal

$$P: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \quad S$$

$$\neg P: \exists x \in \mathbb{R}, x < 0 \quad F$$

$$Q: \exists r \in \mathbb{Q}, r^2 = 2$$

$$\neg Q: \forall r \in \mathbb{Q}, r^2 \neq 2$$

$\left(\begin{array}{c} F \\ S \end{array} \right)$

Om P är utsagan " $\forall x$ har egenskap S ,"

Så är $\neg P$ utsagan " $\exists x$ som saknar egenskap S "

Om Q är utsagan " $\exists x$ som har egenskap S ,"

Så är $\neg Q$ utsagan " $\forall x$ saknar egenskap S "

Symbolen $\perp$, "falsum"
skär för slutet utsaga som är falsk.

$$\underline{\text{Ex. 1}} \text{ (Alltid sant)} (A \wedge \neg A) \iff \perp$$

$$\underline{\text{Ex. 2}} \text{ (Motsägelse-
bevis)} (\neg P \implies \perp) \implies P$$