

Föreläsning 2

SF1661 HT 21, 31/8

Mängdlära

En **Mängd** är en samling
väldefinierade och distinkta
(olika) **element** (objekt).

Exempel: $\{ A, B, 7, \pi, \sqrt{2}, -1 \}$

$\nwarrow$ **Mängdklammer** $\nearrow$

$x \in A$ betyder

"elementet x tillhör mängden A "

$x \notin A$ betyder

"elementet x tillhör INTE mängden A "

Exempel: $M = \{ A, B, 7, \pi, \sqrt{2}, -1 \}$

$$A \in M$$

$$C \notin M$$

$$\sqrt{2} \in M$$

$$3 \notin M$$

Exempel på mängder

Lista:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} =$$

de udda
naturliga talen

$$= \{n : n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}\}$$

Villkor:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

$$L = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y = 2x + 1\} = \begin{matrix} \text{rät linje} \\ \text{planet} \end{matrix}$$

$\emptyset = \{ \}$ "den tomma mängden"

$$\overline{X} = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 = -1 \} = \emptyset$$

Fler exempel

$$\overline{T} = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ jämnt delbart med } 3 \}$$

$$= \{ 3, 6, 9, 12, 15, \dots \}$$

Några standardbeteckningar

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{naturliga talen}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{de hela talen}$$

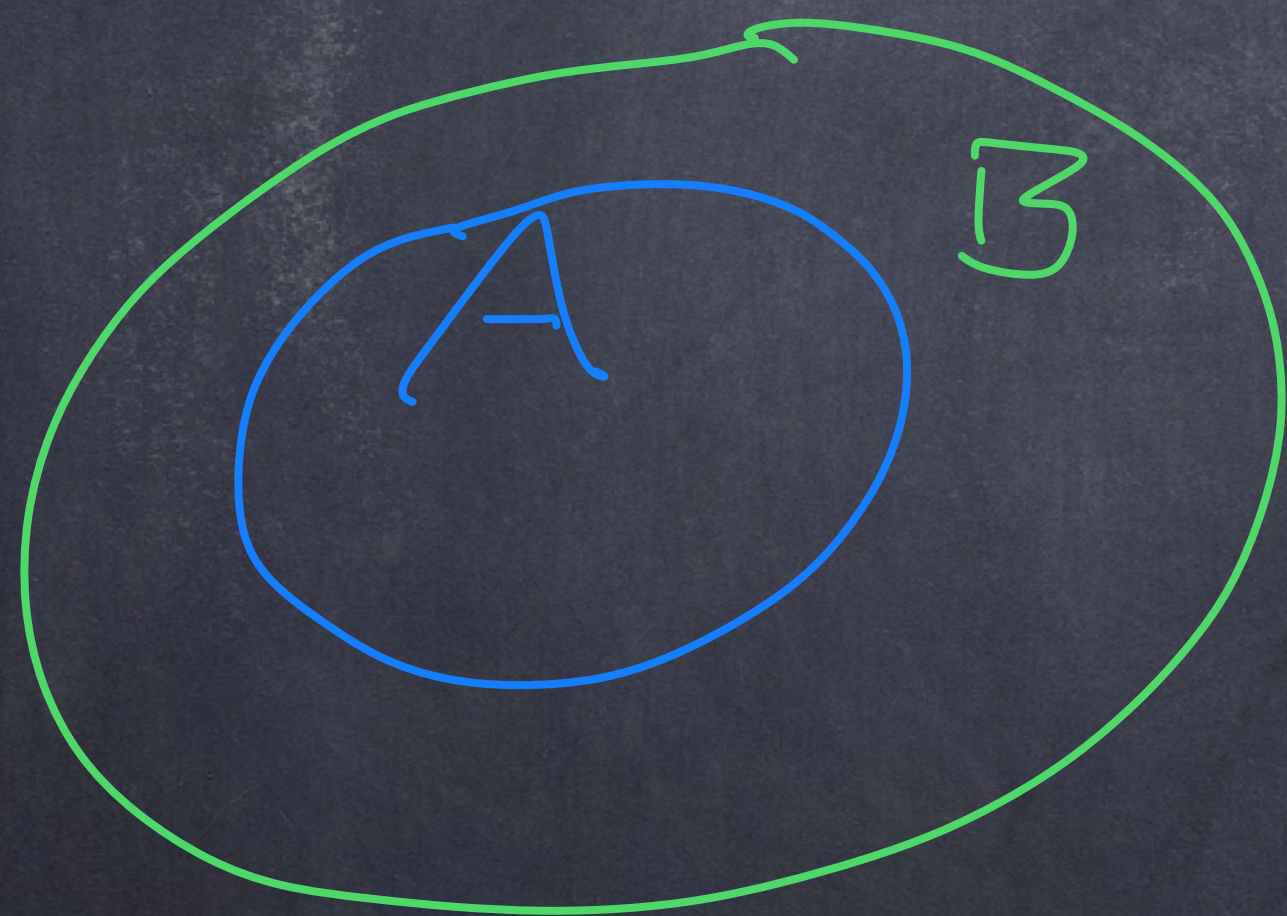
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \quad \text{rationella talen}$$

$$\mathbb{R} = \{ \text{alla reella tal} \}$$

$$\mathbb{C} = \{ x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \} \quad \text{komplexa tal}$$

Delmängder

Def: A är en delmängd till B
Om $x \in A$ medför att $x \in B$



Skrivs: $A \subseteq B$

"är delmängd till"

Ex: $A = \{2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \subseteq B$

$B \not\subseteq A$

Exempel:

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\emptyset = \{\}$$

$$\{1, 2\} \subseteq B$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \subseteq B$$

$$\{3, 5\} \not\subseteq B$$

"TILLHÖR INTE"

$$\emptyset \subseteq B$$

$$\{3\} \subseteq B$$

$\xrightarrow{\text{EJ}}$
Mängd!

~~$\{3\} \subseteq B$~~
 ~~$\{3\} \not\subseteq B$~~

$$3 \in B$$

NONSENSE!
SYNTAX FEL.

• Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$ så
följer A och B har samma element,
dvs $A = B$.

• Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ sägs
 A vara en ⁿäkt delmängd till B ,
skrivs $A \subset B$ (eller $A \subsetneq B$)

Exempel på delmängder

• $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, även $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$

• $P = \{ \text{alla primtal} \}$

$P \subseteq \mathbb{N}$, $P \subsetneq \mathbb{N}$

OBS: $\emptyset \subseteq \overline{X}$, alla mängder $\overline{X}$

Om mängden M har ändligt många element definieras dess kardinalitet som

$$|M| = \text{antal element i } M.$$

Ex:

$$\left| \{ A, B, 7, \pi, \sqrt{2}, -1 \} \right| = 6$$

$\emptyset$ talet noll

$\{ \emptyset \}$ mängd med
talet $\emptyset$ som
enda element

$\{ \}$ tomma mängden

$$| \{ \} | = \emptyset$$

$$| \{ \emptyset \} | = 1$$

$$\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$$

mängd med
två element
 $\emptyset$ och $\{ \emptyset \}$

$$| \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} | = 2$$

Operationer på mängder

$A \cup B$ "A union B"

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ eller } x \in B \}$$



$A \cup B$

"
eller" betyder
här som vanligt
i matematiken
"och/eller"

$A \cap B$

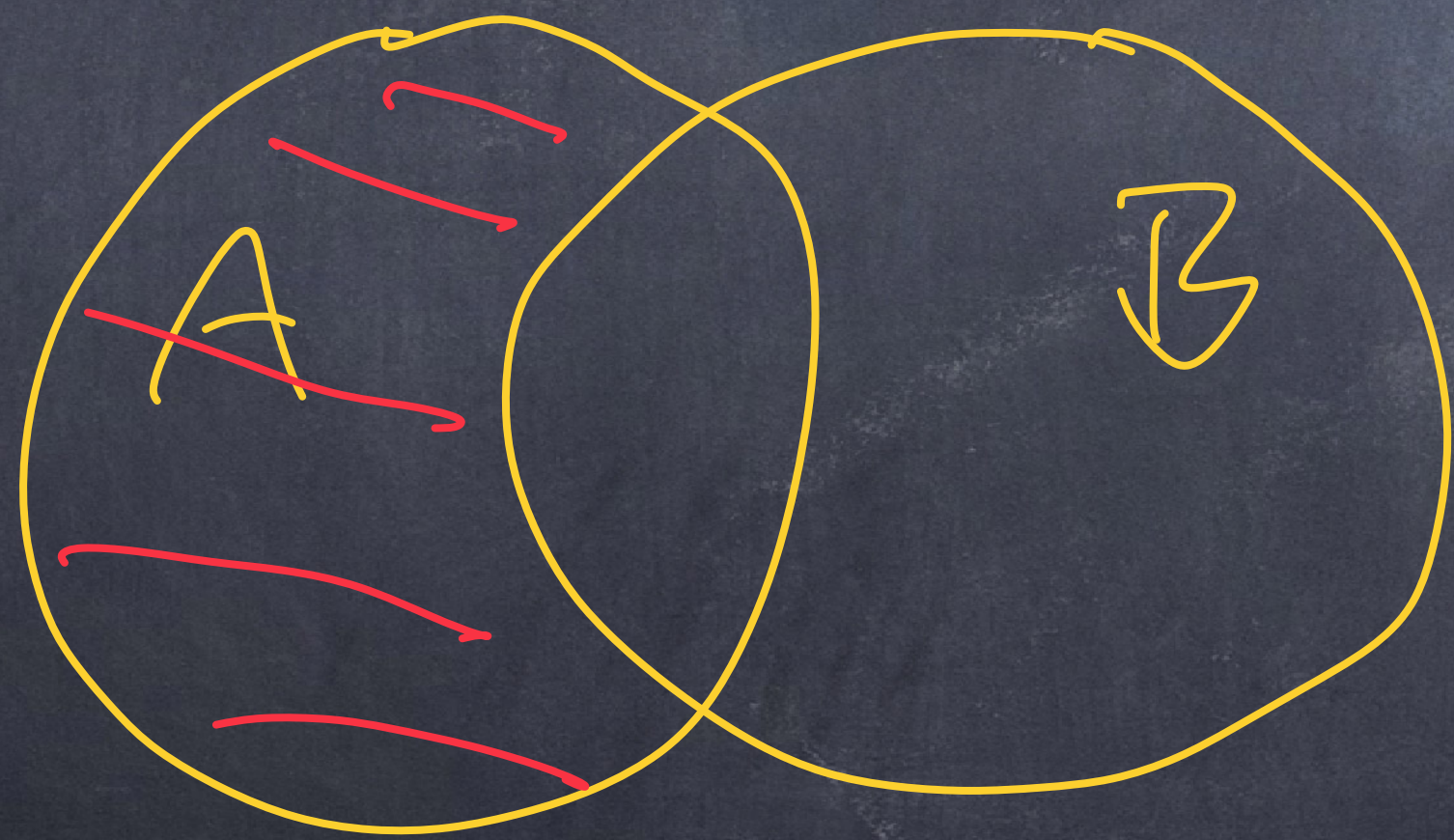
A snitt B, A skärning B

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ och } x \in B \}$$



$A \setminus B$ A minus B , A mà không minus B

$$A \setminus B = \{ x : x \in A, x \notin B \}$$



$A \setminus B$

$$\text{Qm } \underline{X} = \{2, 3, 5\}, \underline{Y} = \{3, 6, 7\}$$

ange

$$\underline{X} \cup \underline{Y} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$\underline{X} \cap \underline{Y} = \{3\}$$

$$\underline{X} \setminus \underline{Y} = \{2, 5\}$$

Komplement

A^c = "komplementet till A"

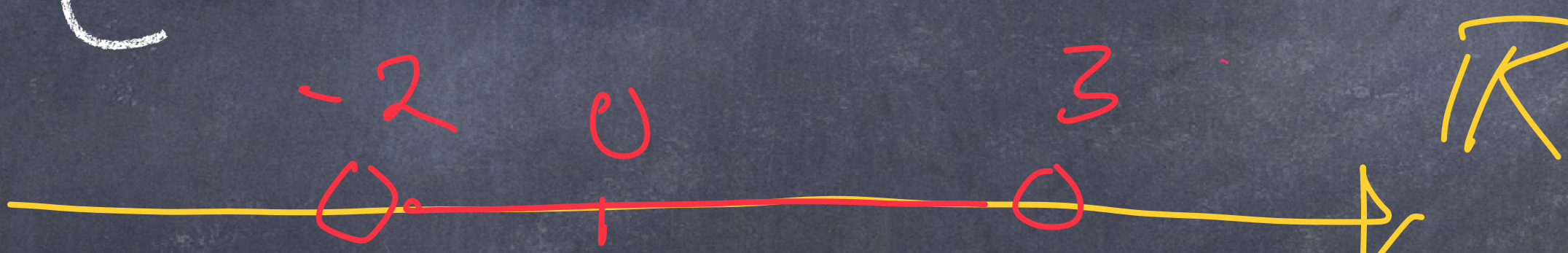
$$= \{x : x \notin A\}$$

Förutsätt er Grandsmängd, UNIVERSE, U

$$= \{x \in U : x \in A\} = U \setminus A$$

Intervallnotation

Delmängder av reella talen (balaxeln)
som är intervall

$$(-2, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$$


öppet
intervall

$$[-2, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 3\}$$


slutet
intervall

Skriv lösningsmängden till
olikheten $1 < 2x \leq 3$

- med mängdklammer

- med intervallnotation

$$1 < 2x \leq 3 \text{ betyder } \begin{cases} 2x > 1 \\ 2x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x > 1 \quad \text{och} \quad 2x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x > 1/2 \quad \text{och} \quad x \leq 3/2$$

$$\Leftrightarrow 1/2 < x \leq 3/2$$

$$\Leftrightarrow x \in \{ x \in \mathbb{R} : 1/2 < x \leq 3/2 \}$$

$$= \left(1/2, \frac{3}{2} \right] \quad \left(\begin{array}{c} \text{h\u00e4lvt \u00f6ppet} \\ \text{intervall} \end{array} \right)$$

de Morgans lagar

SATS: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

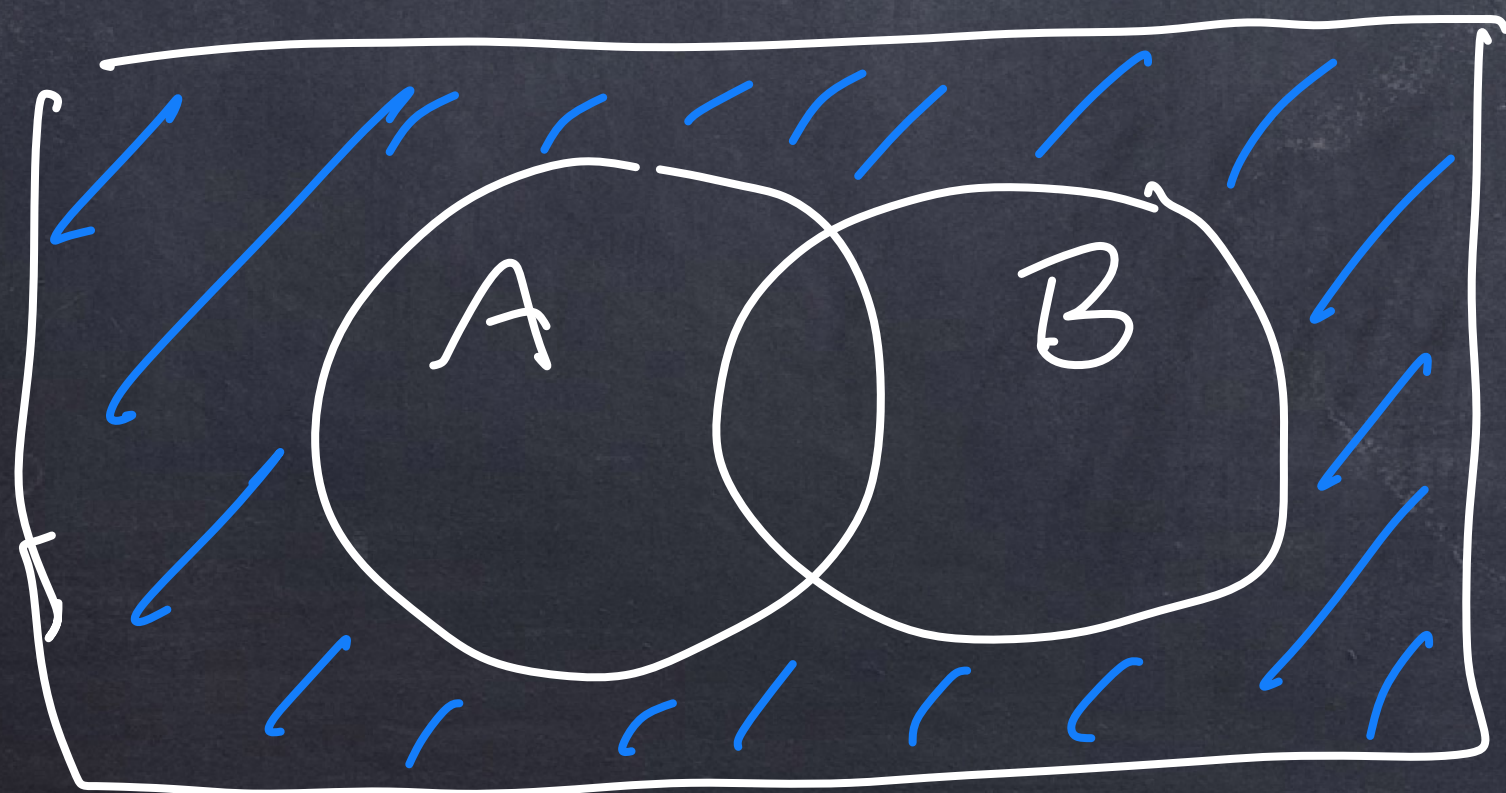
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Beris $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

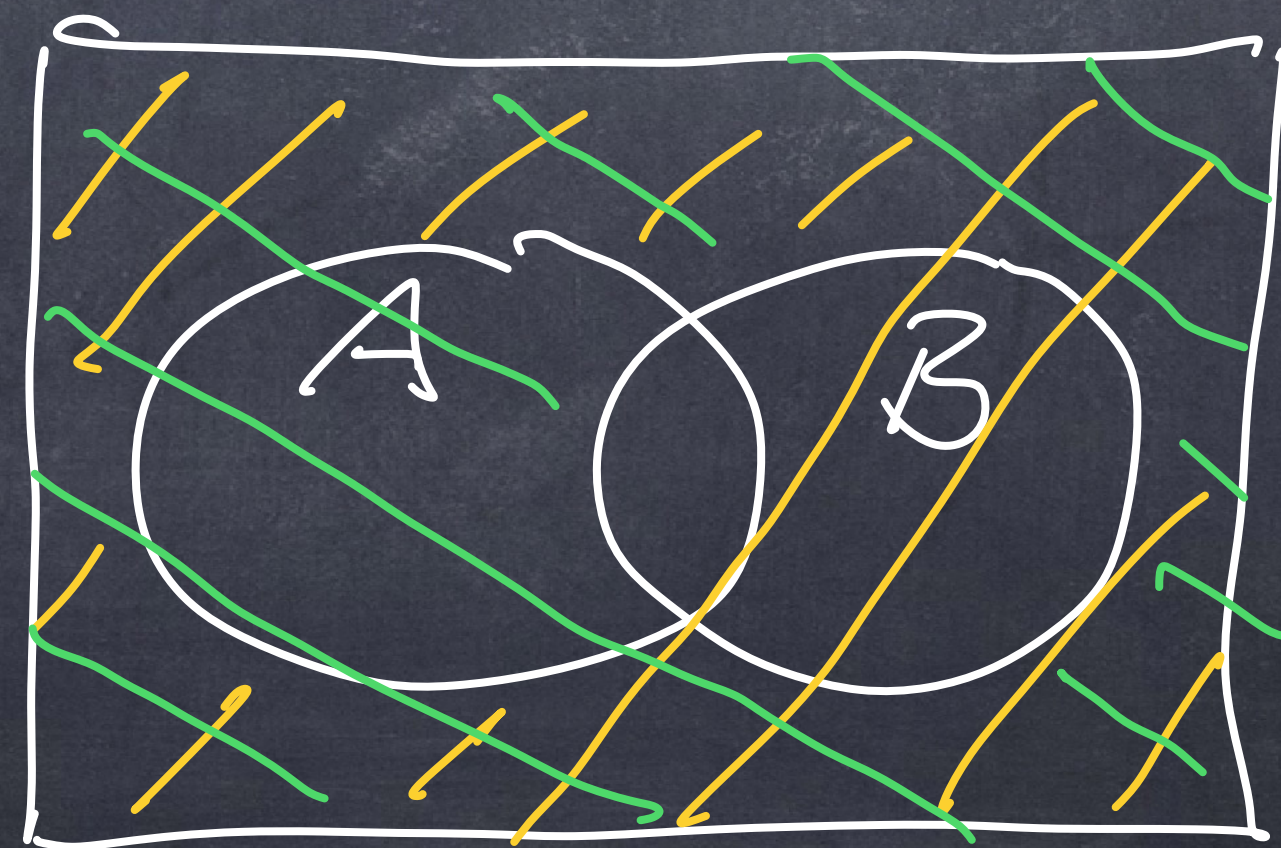
$$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B$$

$$\iff x \notin A \text{ och } x \notin B$$

$$\iff x \in A^c \text{ och } x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c$$



$(A \cup B)^c$



A^c
 B^c
 $A^c \cap B^c$

Öändliga mängders

Kardinalitet

- en orientering

<https://youtu.be/elv0Zmod4H0>

"Infinity is bigger than you think - Numberphile"

TVÅ YOUTUBE-KLIPP OM MÄNGDER MED OÄNDLIG KARDINALITET

https://youtu.be/Uj3_KqkI9Zo

"The infinite hotel paradox"

Kardinalitet för mängder med oändligt många element.

Ex: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$$\mathbb{I} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\text{rationella tal}\}$$

$$\mathbb{R} = \{\text{reella tal}\}$$

$$\mathbb{J} \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Def. Två mängder $\underline{X}$ och $\underline{Y}$
har samma kardinalitet om
det finns en s.k. bijektiv

funktion $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$.

Med andra ord, om det finns en
funktion som "parar ihop" elementen
i $\underline{X}$ och $\underline{Y}$ så att varje $x \in \underline{X}$
motsvaras av ett $f(x) \in \underline{Y}$, och vice versa.

$$\underline{X} = \{a, b, c\}$$



$$\underline{Y} = \{0, 1, 2\}$$

Bijektion $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$

$$f(a) = 0 \quad f(b) = 1$$

$$f(c) = 2$$

Außerdem $|\underline{X}| = |\underline{Y}|$

$$\underline{X} = \{a, b, c\}$$

$$\underline{Z} = \{1, 2\}$$

1 nger bijektion

möglich

$$|\underline{X}| \neq |\underline{Z}|$$

$$\mathbb{J} = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{J}$$

$$f(n) = 2n$$

bijektive Funktion

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{J}$$

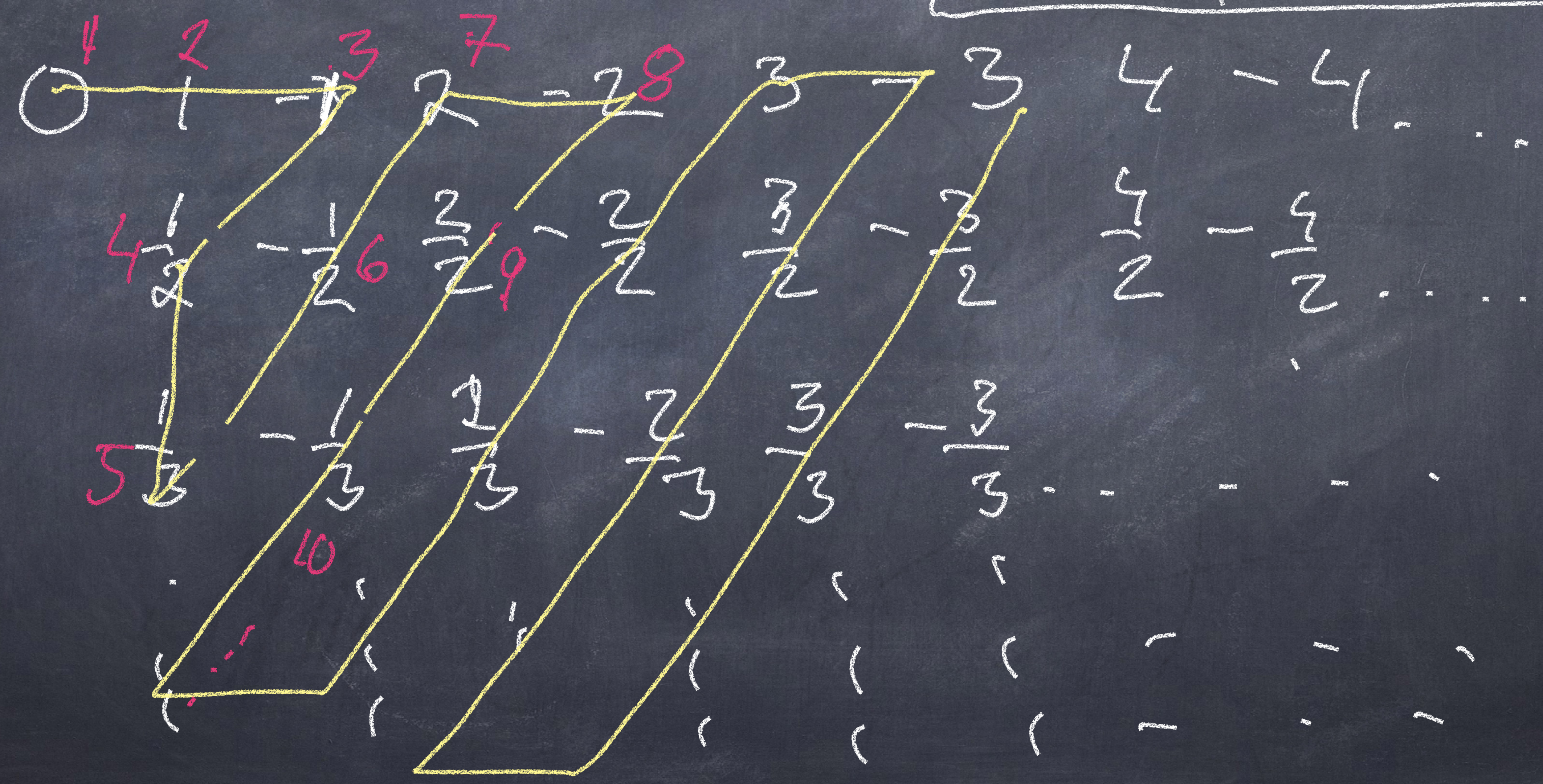
Also

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{J}|$$

same cardinality

A66 Visa att N och Q har
 samma kardinalitet.
 N och Q

$|N| = |Q|$



N co h TR

Kan visa att

|R| ≠ |N|

$$|\mathbb{I}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| \neq |\mathbb{R}|$$



uppräknligt
oändliga

över-
uppräknligt
oändligt.