

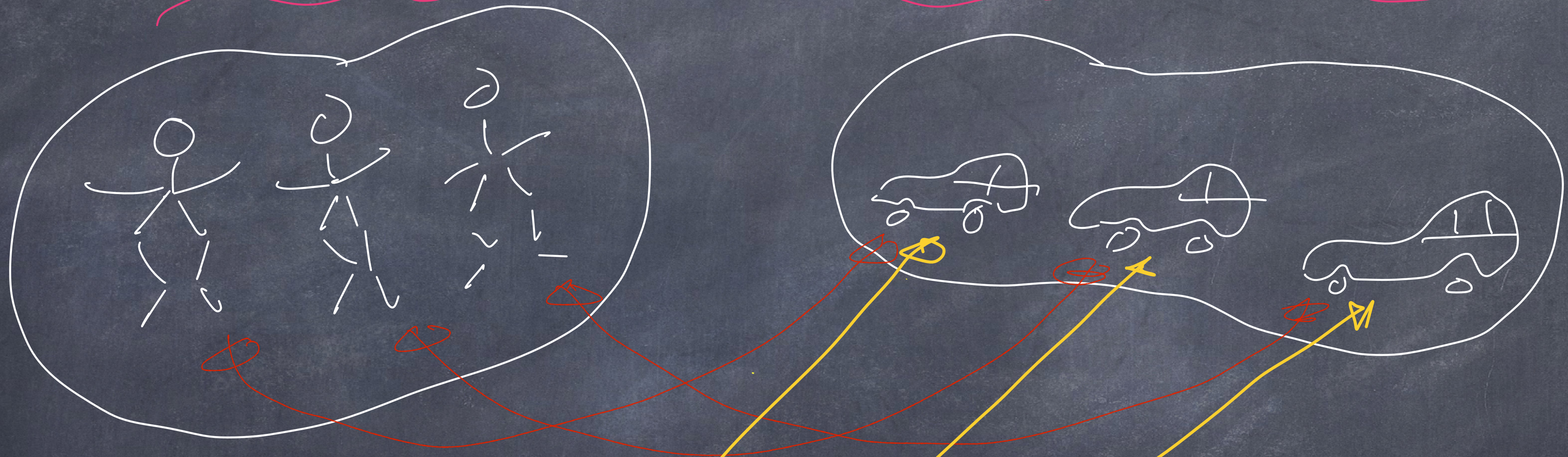
SIF 1661 Perspektiv på Matematik HT21

Föreläsning 1

- Naturliga tal

- Primtal

Vad är "ett tal"?



{ 1, 2, 3 }

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

de naturliga talen.

Kan ses som en
"egenskap" hos mängder.

Representation av naturliga tal

"Streckkod"	Romerska siffror	Hindu-Arabiska siffror
I	I	1
II	II	2
III	III	3
IIII	IV	4
IIII = IIII	V	5
IIII I	VI	6
.	...	10
,	X	50
^	L	100
~	C	500
~	D	1000
~	M	
	MMM CD XXIV	3414

Positionssystem

Decimalt (bas tio)

10 st siffror : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Exempel

72038_{tio}

Platsvärden

$$= \overset{10000}{7} \cdot (tio)^4 + \overset{1000}{2} \cdot (tio)^3 + \overset{100}{0} \cdot (tio)^2 + \overset{10}{3} \cdot (tio)^1 + \overset{1}{8} \cdot (tio)^0$$

$$= 7 \cdot (tio tusen) + 2 \cdot (tusen) + 0 \cdot (hundra) + 3 \cdot (tio) + 8 \cdot (ett)$$

$$= 70000 + 2000 + 0 + 30 + 8 = 72038$$

Binärt (bas två)

Två symboler; 0, 1

Exempel:

Platssvärden

$$10110_{\text{två}} = 1 \cdot (\text{två})^4 + 0 \cdot (\text{två})^3 + 1 \cdot (\text{två})^2 + 1 \cdot (\text{två})^1 + 0 \cdot (\text{två})^0$$

$$= (16 + 0 + 4 + 2)_{\text{tio}} = 22_{\text{tio}}$$

Hexadecimalt (bas sexton)

Sexton stycken symboler:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 samt

A = 10_{tio} B = 11_{tio} C = 12_{tio} D = 13_{tio} E = 14_{tio} F = 15_{tio}

Exempel:

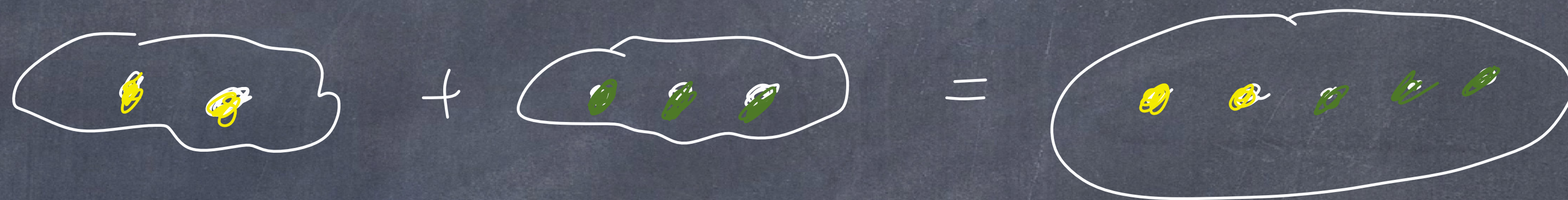
$$(2C4)_{\text{sextan}} = 2 \cdot (\text{sextan})^2 + C \cdot (\text{sextan}) + 4$$

$$= (2 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 4)_{\text{tio}} = (512 + 192 + 4)_{\text{tio}} = 708_{\text{tio}}$$

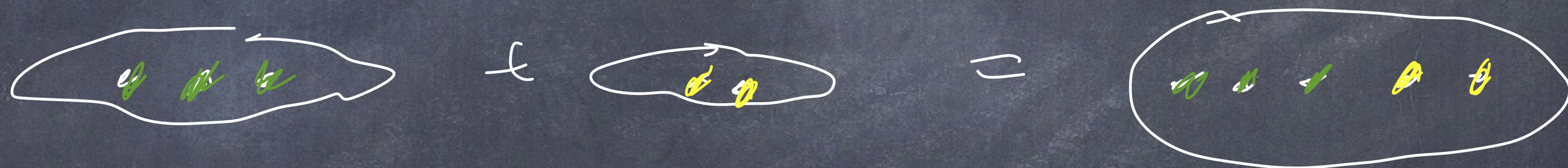
Räknesoperationer i $\mathbb{N}$

• Addition

$$2 + 3 = 5$$



$$3 + 2 = 5$$



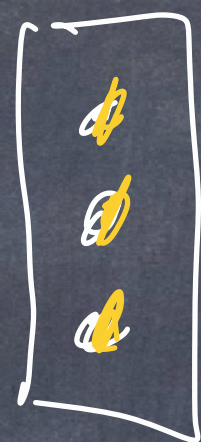
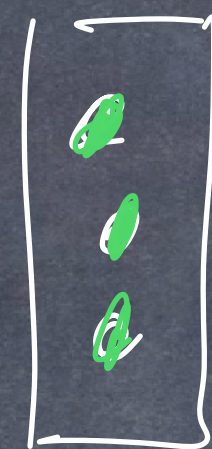
$$m + n = n + m$$

$$, n, m \in \mathbb{N}$$

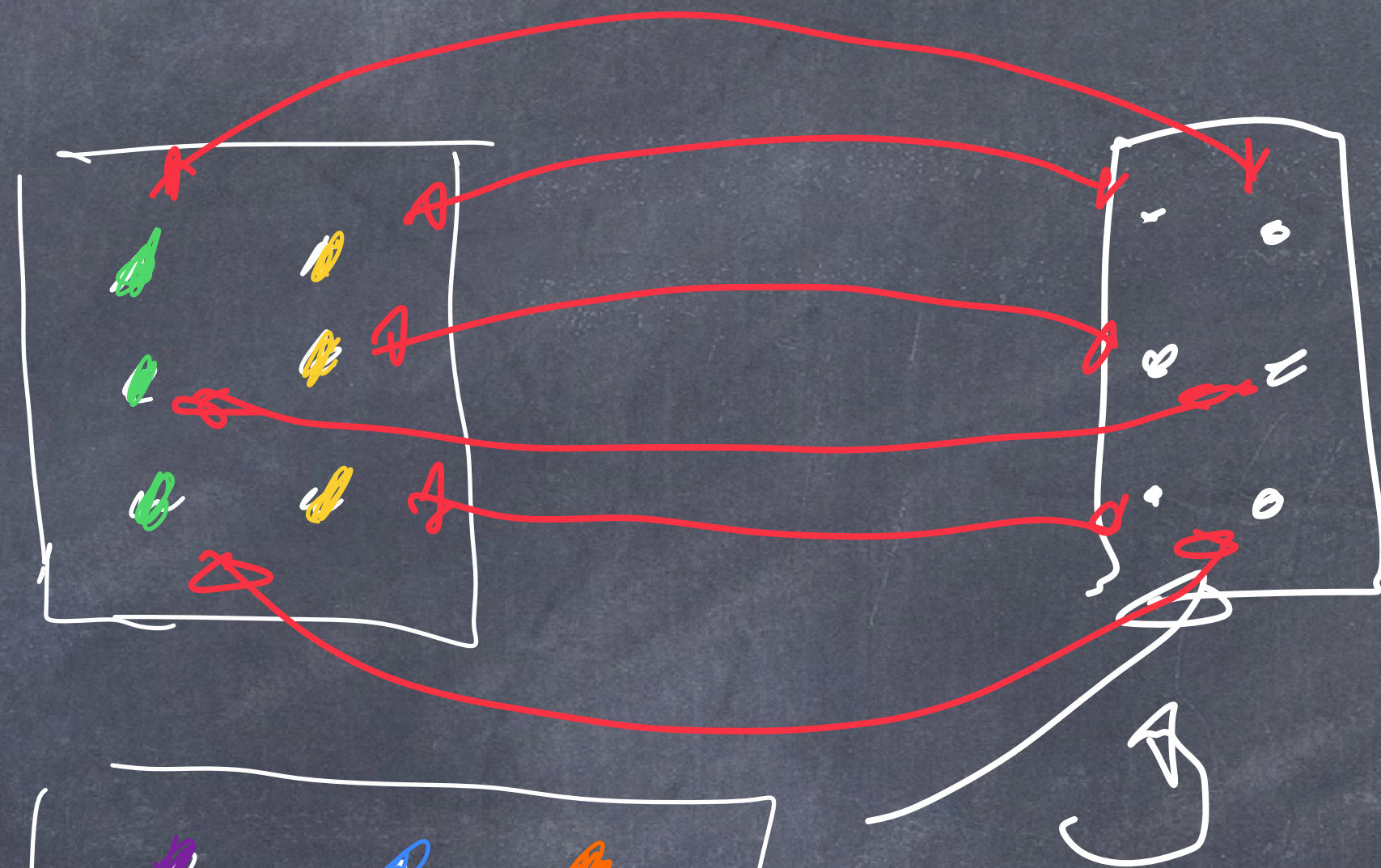
Räkneregler i $\mathbb{N}$

• Multiplikation

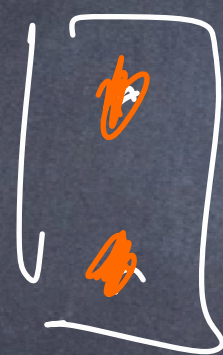
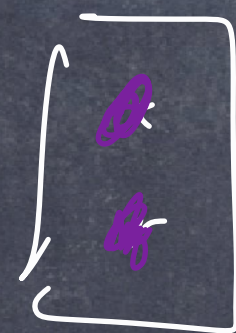
$$2 \cdot 3 = 6$$



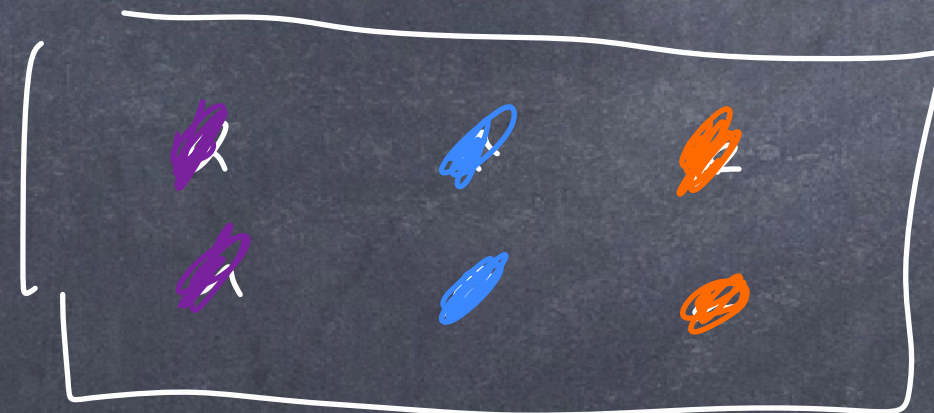
=



$$3 \cdot 2 = 6$$



=



$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

$$m \cdot n = n \cdot m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

SATS: Om m, n och p är
naturliga tal så gäller att

- (1) $n + m = m + n$ (kommutativa lagen för add.)
- (2) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativ lagen för add.)
- (3) $n \cdot m = m \cdot n$ (kommutativa lagen för mult.)
- (4) $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associativa lagen för mult.)
- (5) $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ (1 är multiplikativt enhets-
element)
- (6) $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ (distributiva lagen:
multiplikation distribuerar
över addition)

Exempel på

(4) Associativa lagen för multiplikation

Exempel

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

(6) Distributiva lagen.

Exempel

$$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

Att fundera på:

Distributiva lagen säger att
multiplikation distribuerar över addition

$$n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p.$$

Men gäller det också att

addition distribuerar över multiplikation?

Formulera påståendet

– Avgör om det är sant eller falskt.

Primtal

Definition Ett naturligt tal p

kallas ett primtal om p
inte är jämnt delbart med något
annat naturligt tal än 1 och sig självt.

Alternativ Definition Ett naturligt tal p kallas
ett primtal om det inte finns några
naturliga tal $m \neq 1$ och $n \neq 1$, sådana att

$$p = m \cdot n$$

De första primtalen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

SATS: Varje naturligt tal

$n \geq 2$ kan skrivas som en
produkt av primtal på
ett och endast ett sätt,

(bortsett från faktorernas ordning)

Ex: $7 = 7$, $98 = 2 \cdot 7^2$

Följdsats: Om ett naturligt tal $n > 1$
inte är primtal, så kan
 n skrivas som en produkt av
minst två primtal på ett och endast
ett sätt (Görsett från ordningsföljd)

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

Minst en primfaktor p_i måste
uppfylla $p_i \leq \sqrt{n}$.

"
Är 139 ett primtal ?

"
Är 847 ett primtal ?

139

Räcker att pröva med primtal $\leq \sqrt{139} \leq 12$

$$2 \nmid 139$$

$m \mid n$ "m delar n", $m \nmid n$ "m delar inte n"

$$1+3+9=14, 1+4=5 \text{ och } 3 \nmid 5 \text{ så } 3 \nmid 139$$

$$5 \nmid 139$$

$$\frac{139^6}{7} = 19 + \frac{6}{7}$$

så

$$7 \nmid 139$$

Alltså är

139 ett

primtal

$$\frac{139^7}{11} = 12 + \frac{7}{11}$$

så

$$11 \nmid 139$$

847

Ev prim faktorn måste vara $\leq \sqrt{847} < 30$

2X 847

$8+4+7=19$, $1+9=10$, 3X 10 så 3X 847

5X 847

men,

$\frac{847}{7} = 121$

121

så

$$847 = 7 \cdot 121 = 7 \cdot 11^2$$

så

847

ej primtal.

Skriv 12600 som en
produkt av primtal!

$$\begin{aligned} 12600 &= 126 \cdot 100 = 2 \cdot 63 \cdot 10^2 \\ &= 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

SATS: Det finns oändligt
många primtal

Beviset bygger på följande idé

• Tag en lista med primtal
vilken som helst, t.ex $[2, 5, 11, 19]$

• Bilda produkten av primtalen
i listan och addera 1

$$m = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1$$

• Det nya talet m är nu
inte delbart med något av
primtalen i listan

$$\text{t.ex } m = 2 \cdot (5 \cdot 11 \cdot 19) + 1$$

så division med 2 ger rest 1.

Alltså måste m
innehålla andra primfaktorer
än de som finns i listan

(1 exemplet är

$$m = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1 = 10 \cdot 11 \cdot 19 + 1$$

$$= 10(190 + 19) + 1 = 2091$$

$$= 3 \cdot 697 = 3 \cdot 17 \cdot 41$$

Bevis för att det finns oändligt
många primtal:

Vi antar motsatsen och visar
att det leder till en orimlighet.

Antag att det finns ändligt
många primtal, $N \in \mathbb{N}$,

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$
Bildat talet

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_N + 1$$

$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$ är ej delbart med ugt. p_k ty

$$\frac{m}{p_1} = \underbrace{p_2 \cdot \dots \cdot p_N}_{\text{heltal}} + \frac{1}{p_1}$$

rest, ej heltal

$$\frac{m}{p_2} = p_1 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_N + 1/p_2$$

osv.

Alltså innehåller m ingen av primfaktorerne
 $p_1, p_2, \dots, p_N$. Alltså finns det fler primtal.

MOTSÄGER ANTAGANEN!

För varje naturligt tal N gäller

• Antagandet

"Det finns (exakt) N st. primtal"

leder till slutsatsen

"Det finns fler än N st primtal"

• Detta är en motsägelse,
alltså är antagandet FALSKT
för varje naturligt tal N

• Alltså finns det oändligt många

Lite mer om primtal - orientering

1.

Primtals satsen

- hur tätt ligger primtalen
på talaxeln?

2.

Goldbachs förmodan

3.

Primtalstvillingar

Hur tätt ligger primtalen?

Låt $\pi(n)$ = "antalet primtal $\leq n$ "

$A(n) = \frac{\pi(n)}{n}$ = "andelen primtal $\leq n$ "

n	$\pi(n)$	$A(n)$	$Q(n) = \frac{1}{A(n)}$
2	1	1/2	2
3	2	2/3	3/2
4	2	2/4 = 1/2	2
5	3	3/5	5/3
6	3	1/2	2
⋮	⋮	⋮	⋮

n	$\pi(n)$	$A(n)$	$Q(n) = \frac{1}{A(n)} = \frac{n}{\pi(n)}$	
2	1	1/2	2	
3	2	2/3	$3/2 = 1.5$	
4	2	1/2	2	
5	3	3/5	$5/3 \approx 1.67$	
6	3	1/2	2	
7	4	4/7	$7/4 = 1.75$	
...	...	...	...	
104	1229	$\frac{1229}{10000}$	$\frac{10000}{1229} \approx 8.1$	OKN1NG
105	...	...	≈ 10.4	2.3
106	...	...	≈ 12.7	2.3
				050

så det verkar som att, n stort,
 $Q(10^{n+1}) - Q(10^n) \approx 2.3 \approx \ln 10$

eller, med $M = 10^n$,
 $Q(10M) - Q(M) \approx \ln 10$, M stort.

Jfr Q med $\ln$:

$$\ln(10n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{10n}{n}\right) = \ln 10$$

så $A(n) = \frac{1}{Q(n)} \approx \frac{1}{\ln(n)}$, n stort

Primtalsatsen

Låt $\pi(n)$ vara antal primtal
mindre än eller lika med n .

och låt $A(n) = \frac{\pi(n)}{n}$. Då gäller att

$$A(n) \approx \frac{1}{\ln n}, \quad n \text{ stort.}$$

Mer precist gäller att

$$\frac{A(n)}{1/\ln n} \rightarrow 1 \quad \text{när } n \rightarrow \infty.$$

Andal

$$\text{primtol} = \pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

Andal primtal

$$A(n) \approx \frac{1}{\ln n}$$

h

Goldbachs förmodan^(*) (1742)

Alla jämna naturliga tal
större än 2, kan skrivas
som summan av två primtal

"Förmodan" = Påståendet man tror är
sant, men som ej är bevisat

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 7 + 7$$

...

$$20 = 7 + 13$$

$$22 = 11 + 11$$

$$24 = 11 + 13$$

...

2 2 2

Goldbachs förmodan, svag form

(Bevisades 2013)

Varje udda tal större än 5
kan skrivas som en summa
av tre primtal

Primtals tvillingar

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Om Gårde talen p och $p+2$
är primtal kallas detta talpar

för PRIMTALSTVILLINGAR

Primtalstvilling hypotesen

Det finns oändligt många tal p
s.a. Gåde p och $p+2$ är primtal

SATS (2013-14): Det finns något tal

D sådant att Gåde p och $p+D$
är primtal för oändligt många p .

* Man har visat att $D \leq 246$

* $D=2$ skulle ge primtalstvillinghypotesen