

Lektion, VECKA 2

PROBLEM 1

Betrakta följande vektorfält (i ett kartesiskt koordinatsystem):

$$\vec{A} = (3z + y^2 z^3 + 2x, 2xyz^3, 3x + 3xy^2 z^2)$$

$$\vec{B} = (x^2 z - 2, yz, x + z)$$

- (a) Kan de ha en skalärpotential?
(b) beräkna potentialen (om den finns)

SVAR:

$$\phi(\vec{r}) = 3xz + xy^2 z^3 + x^2 + c \quad \text{för } \vec{A}$$

ingen potential för $\vec{B}$

PROBLEM 2

Ett vektorfält och en kurva definieras av:

$$\vec{A} = ye^z \hat{e}_x + \frac{y^2}{x} \hat{e}_y + ze^y \hat{e}_z$$

$$L = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Beräkna linjeintegralen av vektorfältet längs kurvan.
(b) Är linjeintegralen positiv eller negativ? Motivera.

SVAR: $\pm 12\pi$

PROBLEM 3

Beräkna följande linjeintegral (alla vektorer definieras i ett kartesiskt koordinatsystem):

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{med } \vec{F} = (yz, xz, xy)$$

och

$$L : \begin{cases} \vec{r}(\varphi) = \left(a \cos \varphi, b \sin \varphi, c \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \right) \\ \text{från punkten } P_1 : (a, 0, 0) \\ \text{till punkten } P_2 : \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}, c \sinh\left(\frac{5}{4}\right) \right) \end{cases}$$

SVAR: $\frac{abc}{2} \sinh \frac{5}{4}$

PROBLEM 4

Vattenhastigheten i en flod beskrivs av vektorfältet:

$$\vec{v} = (1 - y^2) \hat{e}_x + (1 - z) \hat{e}_y$$

Beräkna flödet av vatten genom ett fisknät med formen definierad av

$$S : \begin{cases} z^2 + y^2 = 1 - x \\ x > 0 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \end{cases}$$

SVAR: $\frac{3}{4}\pi$

PROBLEM 5

Beräkna cirkulationen av vektorfältet:

$$\vec{A} = -2xy\hat{e}_x + xy\hat{e}_y$$

längs vägen L definierad av:

$$L = \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

Orienteringen av L i punkten $x=2, y=0, z=1$ är $-\hat{e}_y$.

SVAR: -2π

PROBLEM 6

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\vec{A} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + \ln\left(\frac{x}{y-1}\right)\hat{e}_z$$

genom ytan definierad av

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y > 0 \\ |z| < 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y < 0 \end{cases}$$

SVAR: -4π

PROBLEM 7

Betrakta följande yta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 < z < 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \quad i \quad x=1, y=0, z=0 \end{cases}$$

och vektorfältet $\vec{A} = \rho\hat{e}_\rho + \hat{e}_\varphi$ (i ett cylindriskt koordinatsystem). Beräkna integralen

$$\iint_S \vec{A} \times d\vec{S}$$

Du kan använda två metoder: (1) skriv en parametrisering av ytan i ett kartesiskt koordinatsystem och (2) skriv en parametrisering av ytan i ett cylindriskt koordinatsystem.

SVAR: $-4\pi\hat{e}_z$

PROBLEM 8

En halv sfärisk yta S med radie R ligger på vatten. Vattentrycket kan beskrivas av $p = -\rho_m g z$ (med ρ_m vattnets masstäthet och g tyngdaccelerationen). Beräkna kraften $\vec{F}_0$ för att hålla ytan strax under vatten. Anta att ytans massa är noll. Kraften av vattentrycket på ytan kan beräknas av:

$$\vec{F} = -\iint_S p d\vec{S}$$

SVAR: $-\frac{2}{3}\pi\rho_m R^3 g\hat{e}_z$