

LEKTION, VECKA 3

PROBLEM 1

Betrakta följande vektorfält och ytor. Förklara om du kan använda Gauss sats för att beräkna flödet.

(a) $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + \hat{e}_z$, yta: $x^2 + y^2 = 4 - z^2$

(b) $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + \frac{1}{y} \hat{e}_y$, yta: $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$

(c) $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + \frac{1}{y} \hat{e}_y$, yta: $\frac{x^2}{9} + y^2 - 4y + \frac{z^2}{4} + 3 = 0$

(d) $\vec{A} = \frac{1}{r} \hat{e}_r$, yta: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(e) $\vec{A} = \frac{1}{r} \hat{e}_r$, yta: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 3 = 0$

(f) $\vec{A} = r \hat{e}_r$, yta: $x^2 + z^2 - y = 0$

SVAR:

- (a) Ja
- (b) Nej
- (c) Ja
- (d) Nej
- (e) Ja
- (f) Nej

PROBLEM 2

Beräkna flödet av vektorfältet $\vec{A}$ genom ytan S . Vektorfältet $\vec{A}$ och ytan S definieras av $\vec{A} = \vec{r}$

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

SVAR: $4\pi abc$

PROBLEM 3

Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{A}$ genom ytan S . Vektorfältet $\bar{A}$ och ytan S definieras av

$$\bar{A} = x^3 \hat{e}_x + z^3 \hat{e}_z$$

S : en sluten yta som avgränsas av ytorna

$$x^2 + z^2 - y = 0 \quad \text{och} \quad y = 1$$

$$\text{SVAR: } \frac{\pi}{2}$$

PROBLEM 4

Beräkna flödet av vektorfältet $\bar{A}$ genom ytan S . Vektorfältet $\bar{A}$ och ytan S definieras av

$$\bar{A} = (x^3 + 2y) \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + (z^3 - 3z^2 + 3z) \hat{e}_z$$

$$S: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

$$\text{SVAR: } \frac{12\pi}{5}$$

PROBLEM 5

Betrakta följande vektorfält och kurvor. Förklara om vi kan använda Stokes sats för att beräkna cirkulationen.

(a) Vektorfält: $\bar{A} = e^x \hat{e}_x + e^{xz} \hat{e}_y + e^z \hat{e}_z,$

Kurva: $L: \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

(b) Vektorfält: $\bar{A} = (x^2 + y^2)(\hat{e}_z + \hat{e}_y),$

Kurva: $L: \begin{cases} \vec{r}(u) = 2 \cos u \hat{e}_z + 3 \sin u \hat{e}_y \\ u: 0 \rightarrow 2\pi \end{cases}$

(c) Vektorfält: $\bar{A} = r \sin \varphi \hat{e}_r,$

Kurva: $L: \begin{cases} \vec{r}(\varphi) = 2 \cos \varphi \hat{e}_z + 3 \sin \varphi \hat{e}_y \\ \varphi: 0 \rightarrow \pi \end{cases}$

(d) Vektorfält: $\bar{A} = \rho \hat{e}_\rho,$

Kurva: $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z + y = 1 \end{cases}$

(e) Vektorfält: $\bar{A} = \ln \rho \hat{e}_\rho,$

Kurva: $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$

SVAR:

- (a) Ja
- (b) Ja
- (c) Nej
- (d) Ja
- (e) Nej

PROBLEM 6

Beräkna cirkulationen av vektorfältet $\bar{A} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y$ längs kurvan L som definieras av

$$L: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Är tecken av integralen positiv eller negativ? Motivera.

SVAR: $-2\pi ab$

PROBLEM 7

Beräkna cirkulationen av vektorfältet $\bar{A} = -2xy\hat{e}_x + xy\hat{e}_y$ längs vägen L definierad av:

$$L = \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z + y = 0 \end{cases}$$

I punkten $P: x = 0, y = 0, z = 0$ är kurvan orienterad som $-\hat{e}_x$.

SVAR: $-\pi$

PROBLEM 8

Beräkna cirkulationen av vektorfältet $\vec{A}$ längs kurvan L . $\vec{A}$ och L definieras av

(a) $\vec{A} = (x + 2y, y - 3z, z - x)$

L : enhetscirkel i xy -planet, medurs orienterad.

(b) $\vec{A} = (0, xy, 0)$

L : triangel definierad av punkter $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$

(c) $\vec{A} = (0, x^2, z^2)$

L : randkurvan till den del av ytan $x^2 + y^3 + z^4 = 1$ som ligger i första oktanten ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), moturs orienterad sett i riktning mot origo.

SVAR:

(a) 2π

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{3}{4}$

PROBLEM 9

Är följande vektorfält konservativt?

(a) $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + y^2 \hat{e}_y + z^2 \hat{e}_z$

(b) $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + y^2 \hat{e}_y - z^2 \hat{e}_z$

(c) $\vec{A} = f(\rho) \hat{e}_\rho$ (där $\hat{e}_\rho$ är en basvektor i ett cylindriskt koordinatsystem)

(d) $\vec{A} = f(\rho) \hat{e}_\varphi$ (där $\hat{e}_\varphi$ är en basvektor i ett cylindriskt koordinatsystem)

SVAR:

(a) Ja

(b) Nej

(c) Ja

(d) Nej