December 1, 2017. Föreläsning 15, SF1624, CELTE1, CINEK1.

Definition. En $n \times n$ matris A kallas för **diagonaliserbar** om det finns en bas $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ så $[A]_{\mathcal{V}}$ är diagonal matris.

$$T_{S \to \mathcal{V}} A T_{\mathcal{V} \to S} = [A]_{\mathcal{V}} \text{ är diagonal matris.}$$

Proposition. Följande är ekvivalenta:

1. A är diagonaliserbar
2. Det finns en inverterbar matris S så att $S^{-1}AS$ är diagonal (vi säger att S diagonaliserar A).

Låt $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ vara en bas till $\mathbb{R}^n$ så att:

$$[A]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Det betyder att $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$.
$\vec{v}_i$ är egenvektor till A med egenvärden λ_i.

Proposition. En $n \times n$ matris A är **diagonaliserbar** om och endast om:

- det finns en bas $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ som består av egenvektorer
- med motsvarande egenvärden $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

I så fal matrisen $S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ diagonaliserar A:

$$[A]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Proposition. En matris $S = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ diagonaliserar A:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

om och endast om

- kolonnerna $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ är egenvektorer
- med motsvarande egenvärden $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

För att diagonalisera A, behöver vi bestämma om det finns en bas som består av egenvektorer.

Proposition.

Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ vara eigenvektorer till A som motsvarar olika eigenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Då vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ är linjär oberoende.

Fråga: kan följande matris diagonaliseras:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Fråga: Finns det en bas till $\mathbb{R}^n$ som består av eigenvektorer?

Proposition.

Eigenvärdena av en triangel matris A består av coefficienterna av A som står på diagonalen.

Uppgift. Bestäm värda av a, b, och c så att följande matrisen är diagonaliserbar $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Uppgift. Kan följande matris diagonalizeras?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uppgift. Bestäm S så att $S^{-1}AS$ är diagonal, där:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Betrakta en matris $n \times n$ matris A och en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$.

Bestäm $A^{10000}\vec{v}$.

Om A är en diagonal matris:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad A^{10000} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{10000} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^{10000} \end{bmatrix}$$

$$A^{10000}\vec{v} \;=\; A^{10000}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{10000} v_1 \\ \vdots \\ \lambda_n^{10000} v_n \end{bmatrix}$$

Vad kan vi göra om A är inte diagonal matris?

Bestämma om A kan diagonaliseras.

Bestämma en bas $\mathcal{B}$ till $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer så att $[A]_{\mathcal{B}}$ är diagonal.

Antar att $\mathcal{B}$ består av egenvektorer till A. Fäljande matris är diagonal:

$$[A]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} A T_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^{10000} = \underbrace{\underline{T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}}\;\underline{T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}}\;\cdots\;\underline{T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}}}_{10000}$$

$$A^{10000} = \underbrace{T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_{\mathcal{B}}\overbrace{T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}\;\;T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}}^{I_n}[A]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}\;\cdots\;T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}[A]_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}}_{10000}$$

$$A^{10000} = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}([A]_{\mathcal{B}})^{10000}T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$$

Antar att $\mathcal{B}$ består av egenvektorer till A. Följande matris är diagonal:

$$[A]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}} A T_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A^{10000} = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}}([A]_{\mathcal{B}})^{10000} T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$$

$$A^{10000} = T_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{10000} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^{10000} \end{bmatrix} T_{\mathcal{S}\mapsto\mathcal{B}}$$

Uppgift. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Bestäm eigenvärden till A och motsvarande eigenvektorer. Beräkna A^{110}.

Proposition.

Låt A vara $n \times n$ symmetrisk matris.

- det finns en bas till $\mathbb{R}^n$ som består av eigenvektorer;
- geometrisk muliplicitet=algebraiskt muliplicitet
- of v och w är eigenvektorer till A som har olika eigenvärden, då v och w är ortogonala.