Lösningsförslag Tentamen SF1683/29 2020-04-15, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik
SF1683/29 Differentialekvationer och transformer Ten2
15e April 2020
Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsammling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Det fanns vissa små variationer i tentamensformuleringen och den här tentan är en typtenta. På quizet förekom det en del typon som är rättade här. Vi kommer att titta på era lösningar och om jag har anledning att tro att mina typon har påverkat era svar negativt så kommer jag att försökakompensera det.

Del 1.

Uppgift 1. Låt $f(x) = e^{2x}$ på $(-\pi, \pi)$ och antag att $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Beräkna b_2. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 1: Vi kan beräkna

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin(2x) dx = -\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}.$$

Uppgift 2. Låt (f, g) beteckna den vanliga inre produkten på $L^2([-1, 1])$. Beräkna (f, g) när: $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$ och $g(x) = 2x + 3x^2$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 2: Vi beräknar

$$(f, g) = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{2x}{3+x^2} dx}_{=0 \text{ udda över jämt intervall}} + \int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{3+x^2} dx =$$

$$= 6 - 3 \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + (x/\sqrt{3})^2} dx = 6 - 3\sqrt{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = 6 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \arctan(1/\sqrt{3}) = 6 - \sqrt{3}\pi.$$

Uppgift 3 (SF1683). Givet att $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{5s+16}{s^2+6s+8}$ och att $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$, breäkna $f(t)$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 3 (SF1683): Partialbråksuppdela

$$\frac{5s+16}{s^2+6s+8} = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+4}.$$

Det följer att

$$f(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + 2\left(\frac{1}{s+4}\right) = 3e^{-2t} + 2e^{-4t}.$$

Uppgift 3 (SF1629). Givet att $\mathcal{Z}(x(n))(z) = \frac{3z-7}{z^2-5z+6}$, där $\mathcal{Z}(x(n))(z)$ står för z-transformen av $x(n)$, och att $\mathcal{Z}(a^n) = \frac{1}{z-a}$, breäkna $x(n)$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

Lösningsförslag Fråga 3 (SF1629): Vi partialbråksuppdelar

$$\frac{3z-7}{z^2-5z+6} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

Om vi tar inverstransformen av $\mathcal{Z}\left(x(n)\right)(z) = \frac{3z-7}{z^2-5z+6}$ så får vi

$$\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}\right) = \left\{2^n + 2\cdot 3^n\right\}.$$

Svar fråga 3 (SF1629): $x(n) = 2^n + 2\cdot 3^n$.

Uppgift 4. Givet att Fouriertransformen definieras $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ och att $f(x) = e^{-3|x|}$, beräkna $\mathcal{F}(f*f)(\omega)$ där $*$ står för faltning (eng. convolution). Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 4: Vi beräknar

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-i\omega x}dx = \int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-i\omega x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-i\omega x}dx = \frac{6}{9+\omega^2}.$$

Om vi använder att

$$\mathcal{F}(f*f)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega)$$

så får vi följande svar:

$$\mathcal{F}(f*f)(\omega) = \left(\frac{6}{3+\omega^2}\right)^2 = \frac{36}{(9+\omega^2)^2}.$$

Uppgift 5 (SF1683). Vilka av följande räkneregler gäller för Laplacetransformen? Flera alternativ kan vara korrekta, du måste markera samtliga korrekta alternativ för att få poäng. $f(t)$ och $g(t)$ är funktioner som är definierade och oändligt deriverbara för alla $t \in [0,\infty)$, $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ och $\mathcal{L}(g)(s) = G(s)$ står för Laplacetransformen av $f(t)$ respektive $g(t)$:

(1) $\mathcal{L}(e^{-t}f(t))(s) = F(s+1)$
(2) $\mathcal{L}(f''(t))(s) = -s^2F(s) + sf(0)$
(3) $\mathcal{L}(tf(t))(s) = -F'(s)$
(4) $\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = aF(s) + bG(s)$
(5) $\mathcal{L}(f(t/2))(s) = e^{-s/2}F(s)$

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 5 (SF1683): Svar 1, 3 och 4 är rätt.

Uppgift 5 (SF1629). Låt $u(r,\phi)$ vara en lösning till Laplace ekvation på enhetsdisken med randdata

$$u(1,\phi) = a + b\sin(\phi) + c\cos(3\phi).$$

Vilket värde antar $u(0,0)$?
Du måste markera alla korrekta svar men inget felaktigt för full poäng.

(1) a
(2) $a+b+c$
(3) $a+c$
(4) $a+3c$.

Lösningsförslag Fråga 5 (SF1629): Vi vet att lösningen är

$$u(r,\phi) = a + br\sin(\phi) + cr^3\cos(3\phi).$$

Så $u(0,0) = a$. Så endast svar 1. är rätt.

Uppgift 6. Låt $K_n(x)$ vara en följd av Riemannintegrerbara funktioner definierade på intervallet $(-1,1)$. Markera alla antaganden som behövs för att göra förljden till en följd av positiva integrationskärnor (positive integration kernels). Du måste markera alla nödvändiga antaganden (men inget felaktigt) för full poäng.

(1) $K_n(x) \geq 0$ för alla $x \in (-1,1)$.

(2) Det finns ett $N > 0$, ett $\delta > 0$ och ett $\epsilon > 0$ så att om $n > N$ så kommer $\int_\delta^1 K_n(x)dx + \int_{-1}^{-\delta} K_n(x)dx < \epsilon$.
(3) För varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ så exsisterar det ett $N > 0$ så att om $n > N$ så kommer $\int_\delta^1 K_n(x)dx + \int_{-1}^{-\delta} K_n(x)dx < \epsilon$.
(4) För alla $x \in (-1, 1)$ så kommer $K_1(x) \leq K_2(x) \leq K_3(x) \leq ...$
(5) $\int_{-1}^1 K_n(x)dx = 1$ för alla n.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 6: 1, 3 och 5 är rätt.

Uppgift 7. Låt $f(x)$ vara en Riemanintegrerbar funktion. Markera alla villkor på f som garanterar att Fourierserien av f konvergerar till $f(x)$ för alla x i definitionsmängden.

(1) $f \in C^1(T)$ där T är enhetscirkeln.
(2) $f \in L^2(T)$ där T är enhetscirkeln.
(3) $f \in C^2((-\pi, \pi])$
(4) $f(x)$ är styckvis kontinuerligt deriverbar.
(5) Cesarosumman av Fourierserien (till f) konvererar punktvis.
(6) Om $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ och $\lim_{n\to\infty} n^7 (|a_n| + |b_n|) = 0$.
(7) Om $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ och $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2}\right) = 0$.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 7: 1 och 6 är rätt.

Uppgift 8. Vilka av följande antaganden utgör tillsammans ett reguljärt Sturm-Liouville problem.

(1) $p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + q(x)u(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0$, där $p(x) \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$ och $\omega(x) \in C([a, b])$ är givna funktioner.
(2) $u''(x) + p'(x)u'(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0$, där $p(x) \in C^1((a, b))$ och $\omega(x) \in C([a, b])$ är givna funktioner.
(3) $\omega(x) > 0$ för $x \in [a, b]$.
(4) $p(a) \neq 0 \neq p(b)$
(5) $u(a) = 1$ och $u'(b) = 0$.
(6) $u(a) = u'(a)$ och $u(b) = u'(b)$

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 8: 1, 3, 4 och 6 är rätt.

Uppgift 9. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{array}{ll} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) & \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = x\cos(x) & \text{för } x \in (0,\pi). \end{array}$$

Du ska ladda upp en fullständig lösning i pdf- format.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 9: Vi gör en variabelseparation och antar att $u(x, t) = X(x)T(t)$. Ekvationen reduseras då till

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Eftersom VL endast beror på x och HL endast på t så kommer båda led att vara konstanta: säg $= \pm\lambda^2$.

Om $\lambda = 0$ så kommer ekvationen för $X(x)$ att bli $X''(x) = 0$ vilket ger att $X(x) = ax + b$. Eftersom $0 = X(0)$ så måste $b = 0$ och eftersom $X(\pi) = 0$ så måste även $a = 0$. D.v.s. om $\lambda = 0$ så får vi endast den triviala lösningen.

Om $\lambda > 0$ och vi har ett + i ekvationen så får vi att $X'' - \lambda^2 X = 0$ vilket gör att $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. På sedvanligt vis så leder även detta till triviala lösningar.

Om $\lambda > 0$ och vi har $-$ så får vi ekvationen $X'' + \lambda^2 X = 0$ vilken har den generella lösningen $X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$. Eftersom $X(0) = 0$ så måste $a = 0$. Eftersom $0 = X(\pi) = b\sin(\lambda\pi)$ så måste $\lambda = n$ för att vi inte endast ska få triviala lösningar. Detta leder till att $T(t)$ måste vara en multipel av $e^{-n^2 t}$.

Vi gör därför ansättningen att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

För att uppfylla initialdata så måste b_n vara Fourierkoefficienterna av f. Om $n = 2, 3, ...$ så kommer

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)\sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x\cos(x)\frac{d\cos(nx)}{dx}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\underbrace{\int_0^\pi \cos(x)\cos(nx)dx}_{=0 \text{ då } n=2,3,\ldots} - \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x\sin(x)\cos(nx)dx - \frac{2\cos(\pi)\cos(n\pi)}{n} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi x\sin(x)\frac{d\sin(nx)}{dx}dx + \frac{2(-1)^n}{n} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \sin(x)\sin(nx)dx}_{=0 \text{ då } n=2,3,..} + \underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi x\cos(x)\sin(nx)dx}_{=\frac{b_n}{n^2}} + \frac{2(-1)^n}{n}.$$

Detta ger att, för $n = 2, 3, ...$, så kommer

$$b_n = \frac{2n(-1)^n}{1+n^2}.$$

Om $n = 1$ så kommer

$$b_n = b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)dx = -1.$$

Därför så kommer lösningen att bli

$$u(x,t) = -\sin(x)e^{-t} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{1+n^2}\sin(nx)e^{-n^2 t}.$$

Detta är vårt svar.

Uppgift 10. Lös följande integralekvation:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(x-y)^2+1}dy = \frac{2}{9+x^2}.$$

Du får använda följande formler utan motivering:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(\omega) = \pi e^{-i|\omega|}, \tag{1}$$

och

$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\omega/a) \text{ för } a \in \mathbb{R} \text{ och } a \neq 0, \tag{2}$$

där $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$ står för Fouriertransformen av f.

Fullständig motivering krävs, ladda upp en fullständig lösning i pdf format.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 10: Låt oss definiera $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Vi kan då identifiera vänsterledet

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(x-y)^2+1}dy = f * g(x).$$

Vidare så kommer

$$\frac{2}{9+x^2} = \frac{2}{9}g(x/3)$$

så vi kan skriva integralekvationen $f * g(x) = \frac{2}{9}g(x/3)$.

Genom att ta Fouriertransformen av båda led och använda faltningsformeln för Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{2}{9}\mathcal{F}(g(x/3))(\omega) = \frac{2}{3}\hat{g}(3\omega),$$

där vi använde (2) i den sista likheten.

Det följer att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{3}\frac{\hat{g}(3\omega)}{\hat{g}(\omega)} = \frac{2}{3}\frac{e^{-3i|\omega|}}{e^{-i|\omega|}} = \frac{2}{3}e^{-2i|\omega|}, \tag{3}$$

där vi använde (1) i den andra olikheten.

Observera att från (1) och (2) så följer det att

$$e^{-2i|\omega|} = \hat{g}(2\omega) = 2\mathcal{F}(g(x/2))(\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{4}{3}\mathcal{F}(g(x/2))(\omega).$$

Tar vi inverstransformen så får vi

$$f(x) = \frac{4}{3}g(x/2) = \frac{16}{3}\frac{1}{4+x^2}.$$

Svar fråga 10: $f(x) = \frac{4}{3}g(x/2) = \frac{16}{3}\frac{1}{4+x^2}$

Del 2.

Uppgift 11. Beräkna Fouriertransformen, i distributionsmening, av $f(x) = x^2$.

Du får använda inverstransformen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = f(x),$$

utan motivering, förutsatt att den generalserade integralen konvergerar.

Fullständig motivering krävs, ladda upp en fullständig lösning i pdf format.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 11: Låt $\phi \in \mathcal{S}$ (=Schwartzklassen) då kommer, per definition, distributionen $\hat{f}$ att definieras

$$\hat{f}[\phi] = f[\hat{\phi}] = \int_{\mathbb{R}} x^2\left[\int_{\mathbb{R}}\phi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega\right]dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left[\phi(\omega)x^2e^{-i\omega x}\right]d\omega dx = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} -\phi(\omega)\frac{d^2e^{-i\omega x}}{d\omega^2}d\omega\right]dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}\phi''(\omega)e^{-i\omega x}d\omega\right]dx, \tag{4}$$

där vi använde två partiella integrationer i den sista likheten.

Vi kan fortsätta (4) genom att observera att den inre integralen är en Fouriertransform

$$(4) = -\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi''}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}}\widehat{\phi''}(x)e^{i0x}dx = -2\pi\phi''(0),$$

där vi använde inverstransformen i det sista steget.[1]

Vi kan därför observera att $\hat{f}[\phi] = -2\pi\phi''(0)$. Detta leder till följande svar:

Sfar fråga 11: $\hat{f} = -2\pi\delta''$.

Uppgift 12. Bevisa, eller motbevisa, att Fourierserien till $f \in C^\infty(T)$ konvergerar till $f(x)$ för varje $x \in T$ där T är enhetscirkeln.

Du får använda att Fourierserien konvergerar i cesaromening i punkter där f är kontinuerlig utan bevis.

Fullständig motivering krävs, ladda upp din lösning i pdf format.

[1 poäng]

[1] Eftersom Fouriertransformen, och dess invers, avbildar Schwartzklassen på Schwartzklassen så är alla integraler i ovanstående beräkningar konvergenta.

Lösningsförslag Fråga 12: Eftersom T är kompakt och $f \in C^\infty(T)$ så är f'' begränsad: $\sup_{x\in T} |f''(x)| = M \leq \infty$. Vi kan därför göra uppskattningen, för $n \neq 0$,

$$2\pi M \geq \left| \int_T f''(x)e^{-inx}dx \right| = n^2 \left| \int_T f(x)e^{-inx}dx \right| = n^2|c_n|,$$

där vi använde två partiella integrationer i den första likheten och c_n är den n :te Fourierkoefficienten av f.

Det följer att, för $n \neq 0$,

$$|c_n| \leq \frac{2\pi M}{n^2}.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent så implicerar jämförelsetestet att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

är absolutkonvergent och därför konvergent.

Vidare så kommer, enligt uppgiftsformuleringen, $\sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{inx}$ att cesarokonvergera till $f(x)$ för alla $x \in T$ (eftersom $f \in C^\infty(T)$ implicerar att $f \in C(T)$). Så uppgiften följer om vi kan visa att en konvergent serie konvergerar till samma värde som den cesarokonvergerar till.

För att visa att en konvergent serie konvergerar till sin cesarosumma så introducerar vi följande notation

$$s_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n \text{ och } S_M = \frac{1}{M+1}\sum_{N=0}^{M} s_N.$$

Att $\sum_{n=-\infty}^\infty a_n$ cesarokonvergerar betyder att gränsvärdet $\lim_{M\to\infty} S_M$ existerar. Vi kommer att anta att $\sum_{n=-\infty}^\infty a_n$ konvergerar till S och visa att $\lim_{M\to\infty} S_M = S$.

Att $\sum_{n=-\infty}^\infty a_n$ konvergerar till S betyder att det för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $K > 0$ så att

$$N > K \Rightarrow |s_N - S| < \epsilon.$$

Fixera ett $\epsilon > 0$ och låt K vara som i föregående stycke. Det följer, för $M > K$, att

$$|S_M - S| = \left| \frac{1}{M+1}\sum_{N=0}^{M} s_N - S \right| = \left| \frac{1}{M+1}\sum_{N=0}^{K} s_n + \frac{1}{M+1}\sum_{N=K+1}^{M} s_N - S \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{M+1}\left| \sum_{N=0}^{K} s_N - (K+1)S \right| + \frac{1}{M+1}\left| \sum_{N=K+1}^{M} (s_N - S) \right| \leq \frac{1}{M+1}\left| \sum_{N=0}^{K} s_N - (K+1)S \right| + \epsilon. \tag{5}$$

Eftersom $\left|\sum_{N=0}^{K} s_N - (K+1)S\right|$ är begränsad så kommer

$$\frac{1}{M+1}\left| \sum_{N=0}^{K} s_N - (K+1)S \right| < \epsilon$$

för M tillräckligt stort. Om vi sätter in det i (5) så får vi att om M är tillräkligt stort så kommer $|S_M - S| < 2\epsilon$. Det följer att $\sum a_n$ cesarokonvergerar till samma värde S som den konvergerar till i klasisk mening. Påståendet i uppgiften följer.