Fö: 2

Iterationer – diskreta dynamiska system.

I. Motivering.

Ex Populationsmodeller.

$$\#\text{ fiskar år } n \xrightarrow{f} \#\text{ fiskar år}(n+1)$$

$$x_n \xrightarrow{f} x_{n+1}$$

antal

$$f(x_n) = x_{n+1}$$

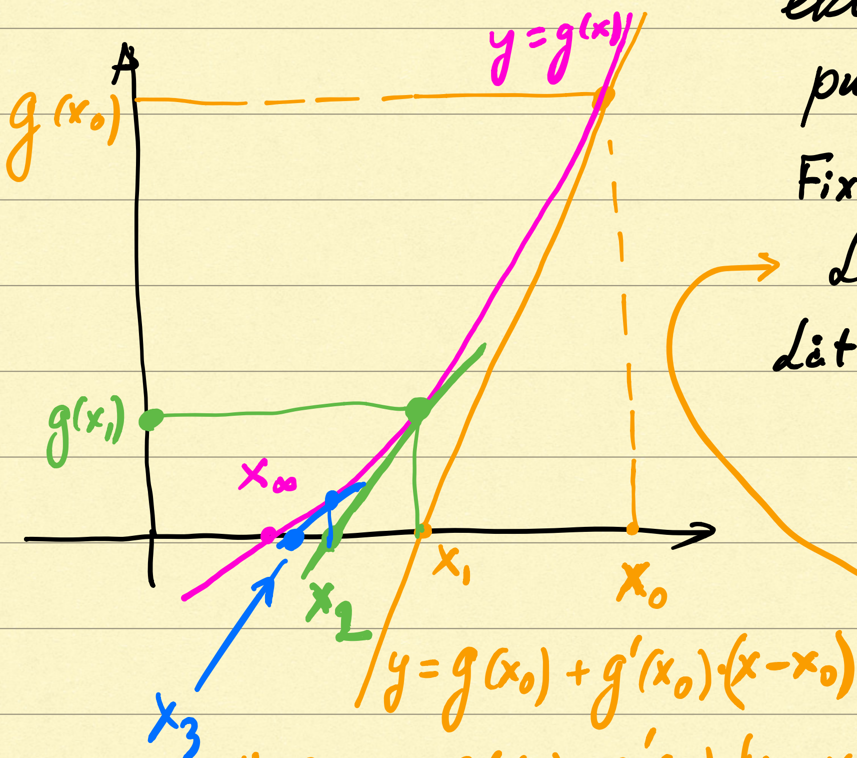
$$x_0 \xrightarrow{f} \underbrace{a\cdot x_0}_{x_1} \xrightarrow{f} \underbrace{a^2 x_0}_{x_2} \xrightarrow{f} \underbrace{a^3 x_0}_{x_3}$$

Det enklaste: $\boxed{x_{n+1} = a\cdot x_n}$

Q Hur växer följden $x_0, x_1, x_2, \dots x_n, \dots$

- linjärt?
- ✓ exponentiellt?
- annat?

Ex Newtons metod. (Söker lösningar till ekv. $g(x)=0$ nära punkten $x=x_0$)



Fixera x_0.

Låt $x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} := f(x_0)$

Låt $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$

$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$

$\underbrace{x_n = f^n(x_0)}$ notation

x_n är n-te iteration

$y=0 \Rightarrow g(x_0)+g'(x_0)\cdot(x_1-x_0)=0$

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

av x_0.

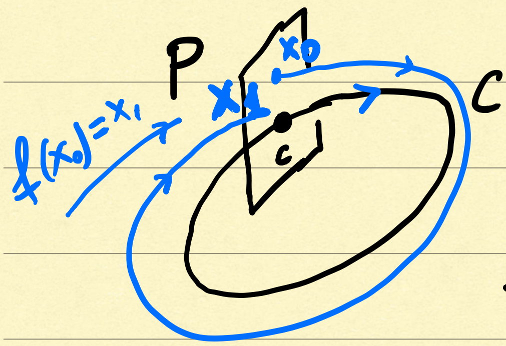
Man kan skriva: $x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$.

Under vissa förutsättningar får vi:

$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_\infty$, som är lösningen till $g(x)=0$ nära x_0

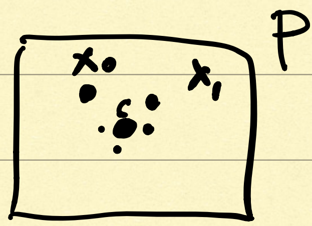
(se boken i Envariabeln)

<u>Ex.</u> Låt oss studera ett system av diff. ekvationer nära en gränscykel C i $\mathbb{R}^3$



Ibland är det enklare att betrakta ett plan P (som inte tangerar C).

Tag startvärden x_0 på P och betrakta den första punkten $x_1 \in P$ där banan av x_0 skär P. Kalla $f(x_0) = x_1$ (f kallas för <u>returavbildning</u>).



Följden $x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_2 \rightarrow \dots\ x_n \rightarrow$ ger mycket info om beteendet av diff. ekv. kring C, t.ex. om stabilitet av C.

<u>Jämförelse</u>:

Autonoma diff. ekv. Iterationer

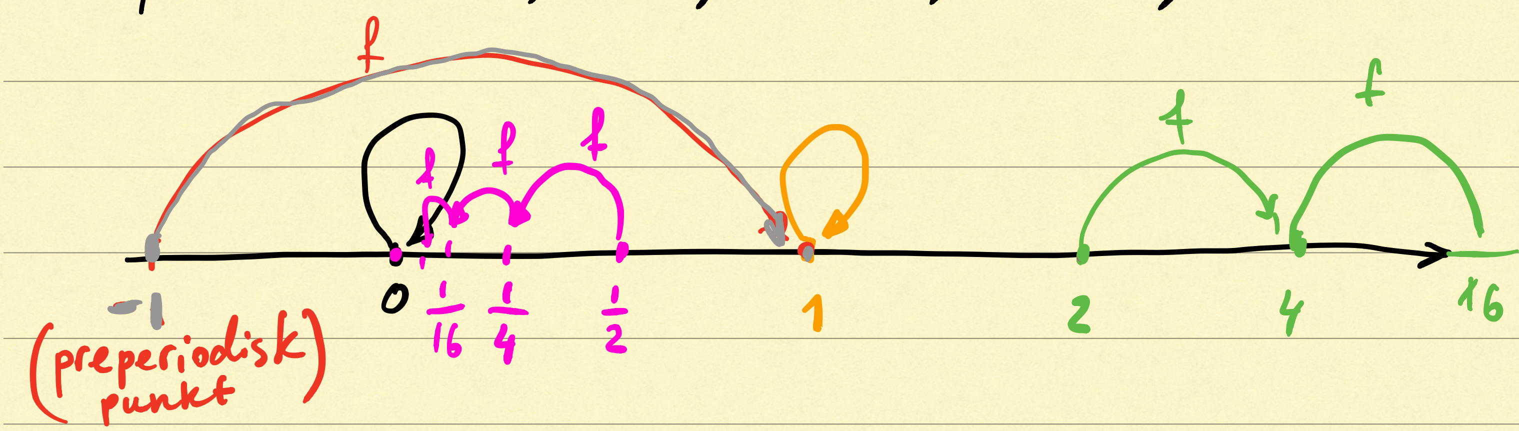
- Tillstånd beskrivs av funktion $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$
- Ekvationen är, t.ex.,
  $$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

- Tillstånd beskrivs av en följd x_n, $n \in \mathbb{Z}$
- Låt $\Delta t = 1$.
  $$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x_{n+1} - x_n := g(x_n)$$
  $$x_{n+1} = \underbrace{x_n + g(x_n)}_{\tilde{g}(x_n)}.$$

OBS: om diff. ekv. och differans-ekvation har liknande utseende, kan de ha helt olika betende. Bli inte lurade!.

II Ex Låt $f(x) = x^2$ $\quad f(f(x))$

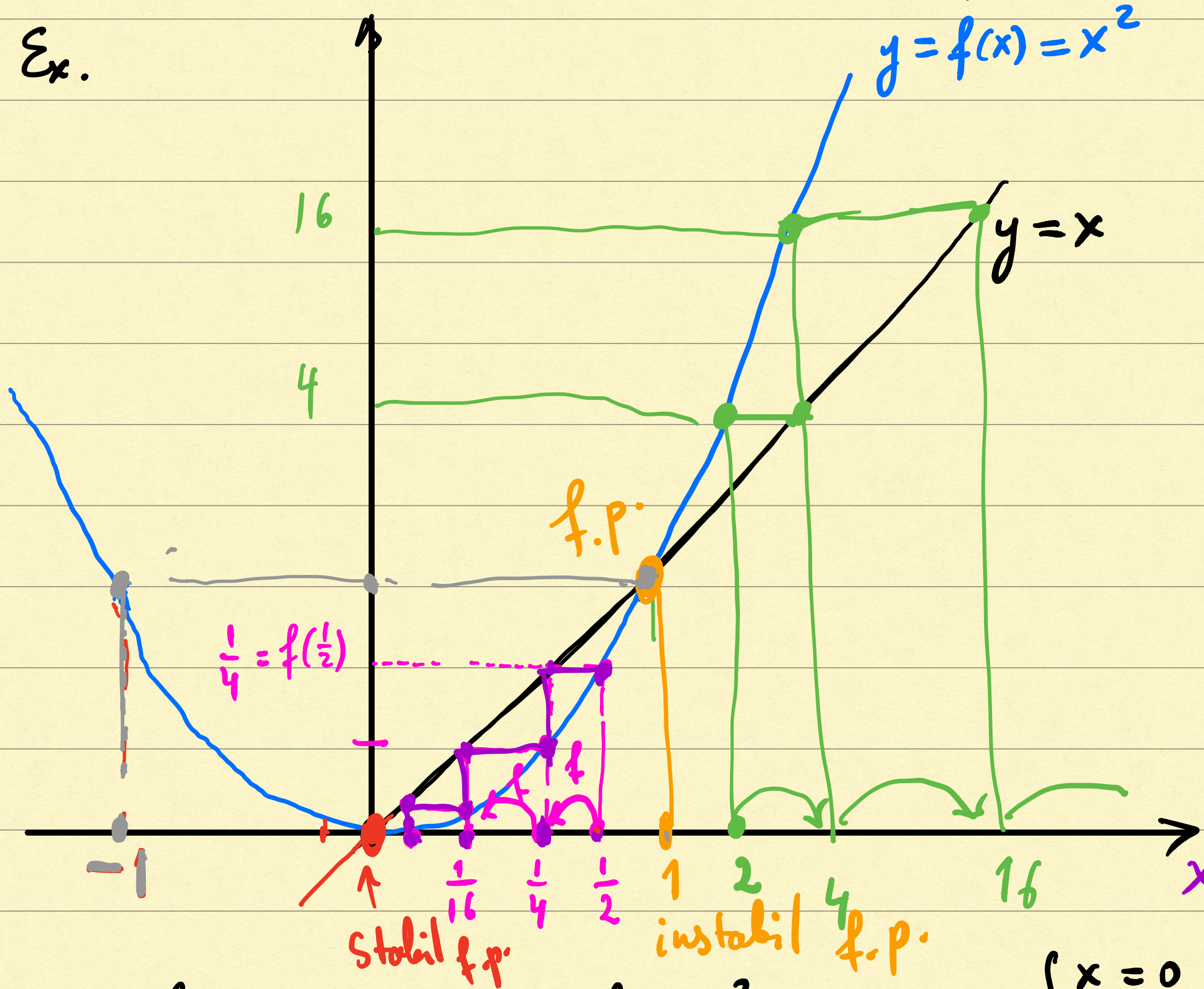
Bestäm $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ (och skissa dessa) för $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$.



Def x_0 kallas för en fixpunkt för $f(x)$ om
$$f(x_0) = x_0$$
(här är 0 en f.p.
och 1 —"—)

Grafisk iteration (se även litteraturen på hemsidan).

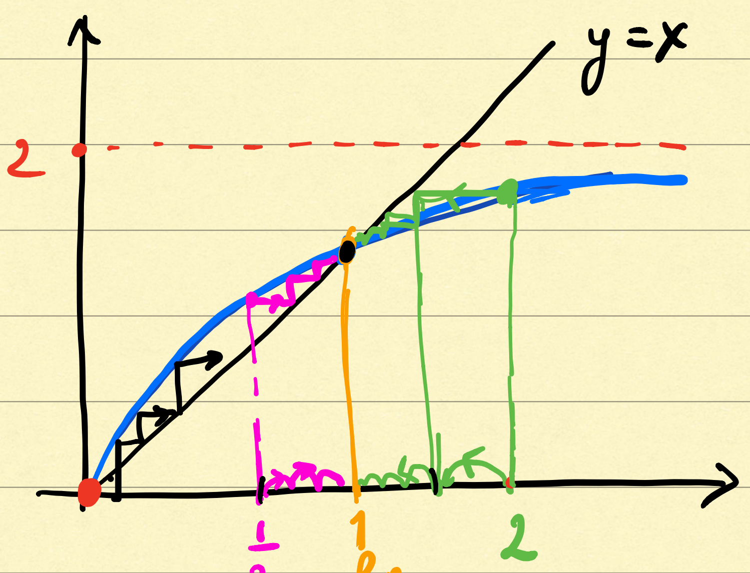
Ex.



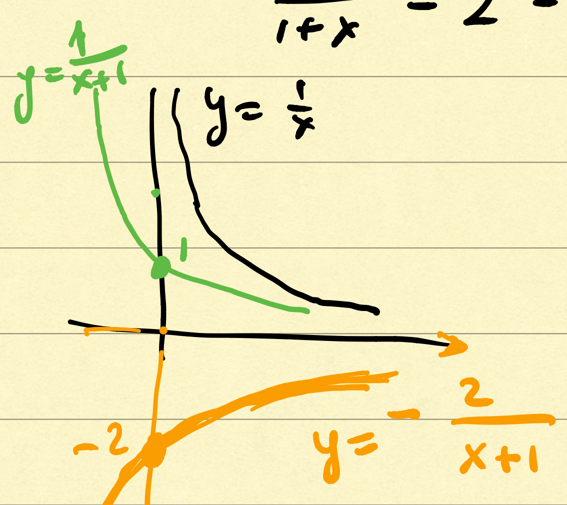
fixpunkter: $f(x) = x^2 = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ex. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$, $x > 0$.

Iterera grafiskt punkter: $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2$.



OBS: $\dfrac{2x}{1+x} = 2 - \dfrac{2}{x+1}$



!! Definitioner av stabil/instabil f.pt — se kompendium.

OBS $x = 1$ är en asymptotiskt stabil f. pt
$x = 0$ är en instabil fixed pt.

OBS $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$|f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$. f.pt. 1 är asympt. stabil
$|f'(0)| = 2 > 1$. f.pt. 0 är instabil

[Detta är ingen slump: se sats 1 sid 11 i kompendium. Bevis — uppgift.]

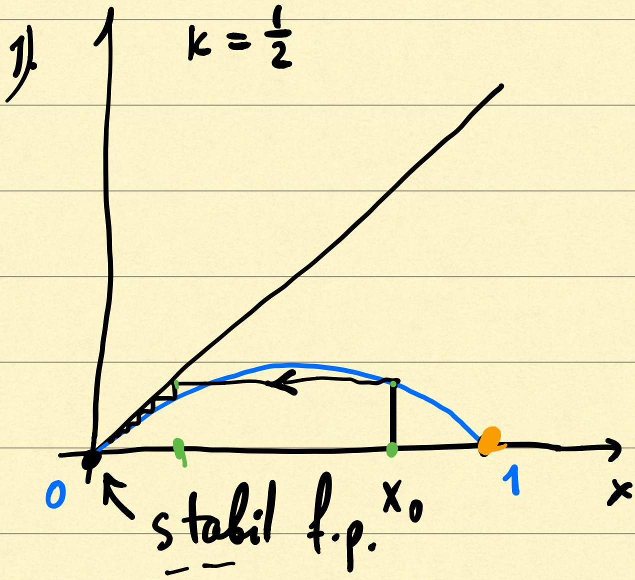
OBS Om $f'(x) = 1$ ger satsen ingen info om stabilitet (jämför med diff.ekv.)

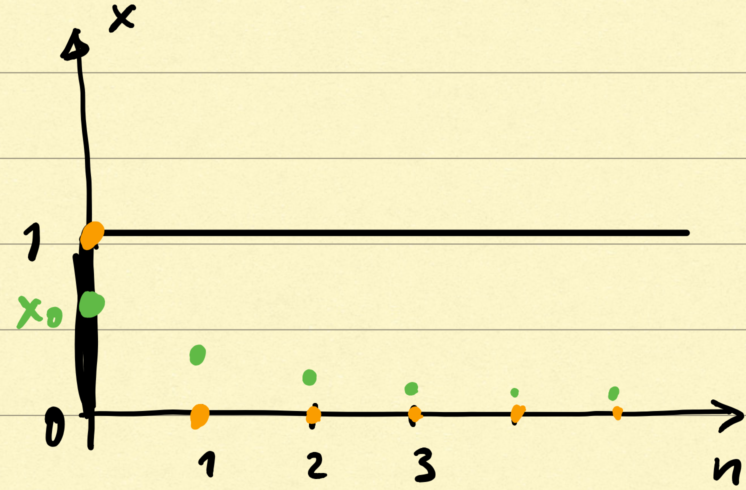
III Kvadratiska familjen $x \xrightarrow{f_K} Kx(1-x)$
(olika K.)

Varför intressant: • $f(x) = \lambda x$ ($x \to \lambda x \to \lambda^2 x \ldots$) är en (för) enkel modell
• $f(x) = x^2 + b$ — nästa svårighetsgrad.
Svår! Funktion „med samma form av grafen" uppvisar liknande fenomen

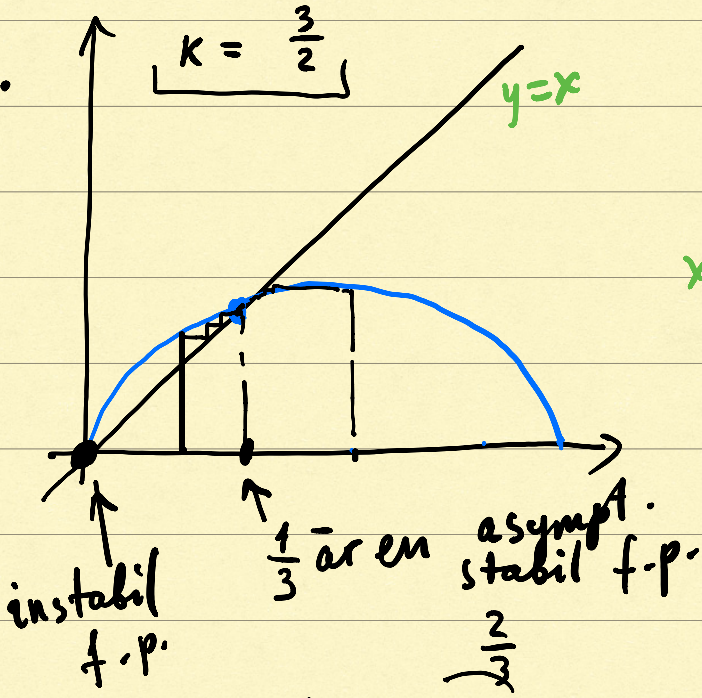
Betrakta $f: [0,1] \to [0,1]$,
$f(x) = kx(1-x)$, $k \in (0,4]$.

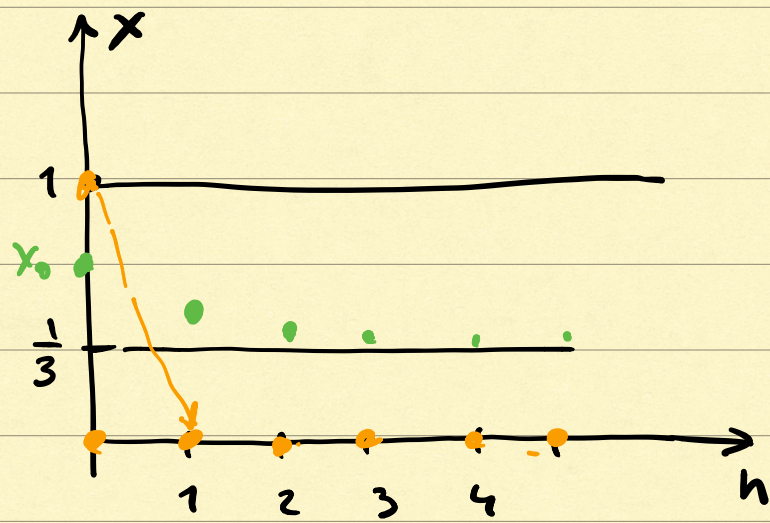
1). $k = \frac{1}{2}$





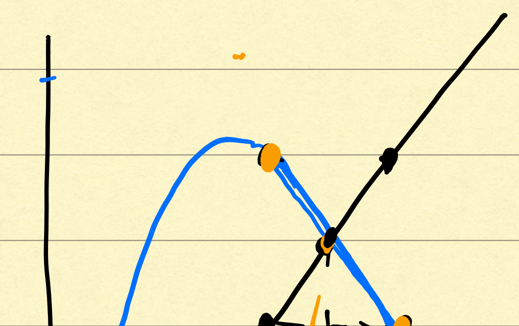
2). $\boxed{K = \frac{3}{2}}$

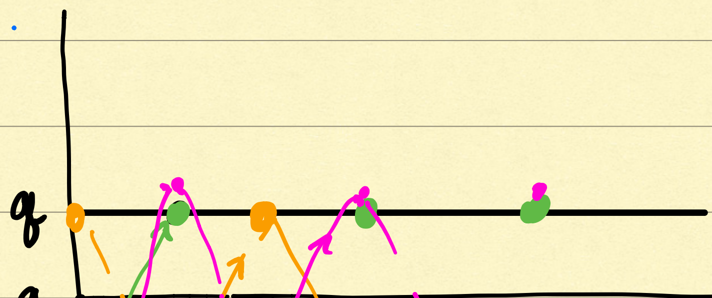


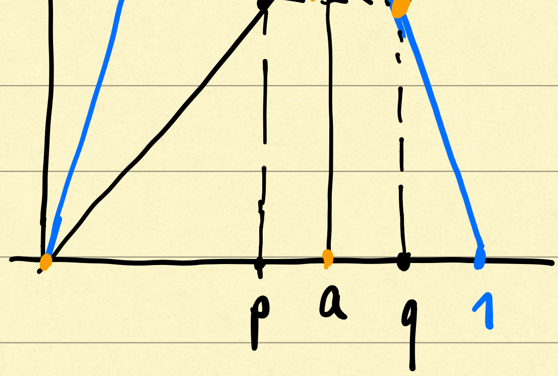


$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \underbrace{\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \overbrace{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}^{\frac{2}{3}}}_{K \cdot x \cdot (1-x)} = \frac{1}{3}$$

3.







a är en instabil f.pt.

$$f(p) = q, \qquad f(q) = p$$

<u>2-periodisk bana.</u>

Denna bana är asympt. stabil.

$= f(f(p)) = f(q)$

<u>OBS</u>: $f^2(p) = p, \; f^2(q) = q$

Alltså är p och q fixpunkter till funktionen $f^2(x)$.

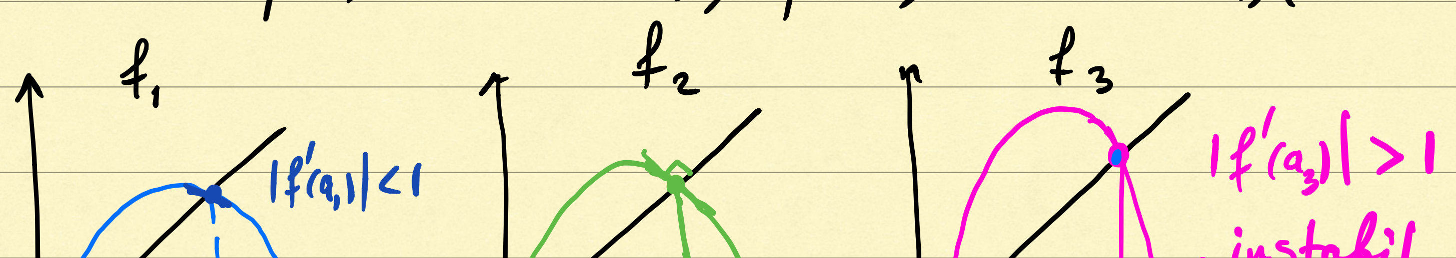
$1+x^2$

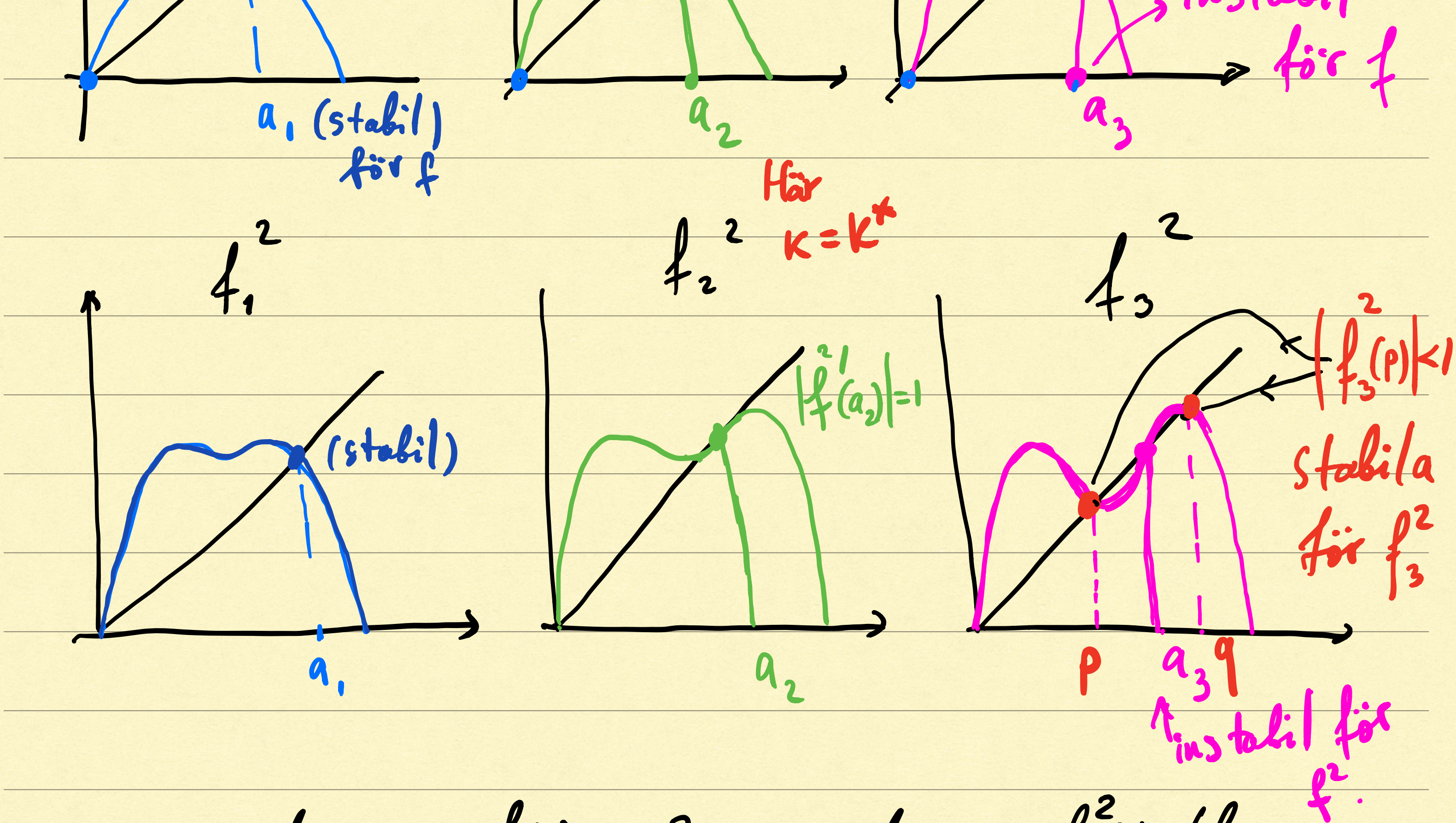
Ex. $f(x) = 1+x^2$; $\quad f^2(x) = f(f(x)) = 1 + (1+x^2)^2 =$

$= 2 + 2x^2 + x^4.$

På samma sätt, en n-periodisk punkt är en fixpunkt för f^n.

Låt $f(x) = kx(1-x)$, $\; f^2(x) = k(kx(1-x))\cdot(1-kx(1-x))$



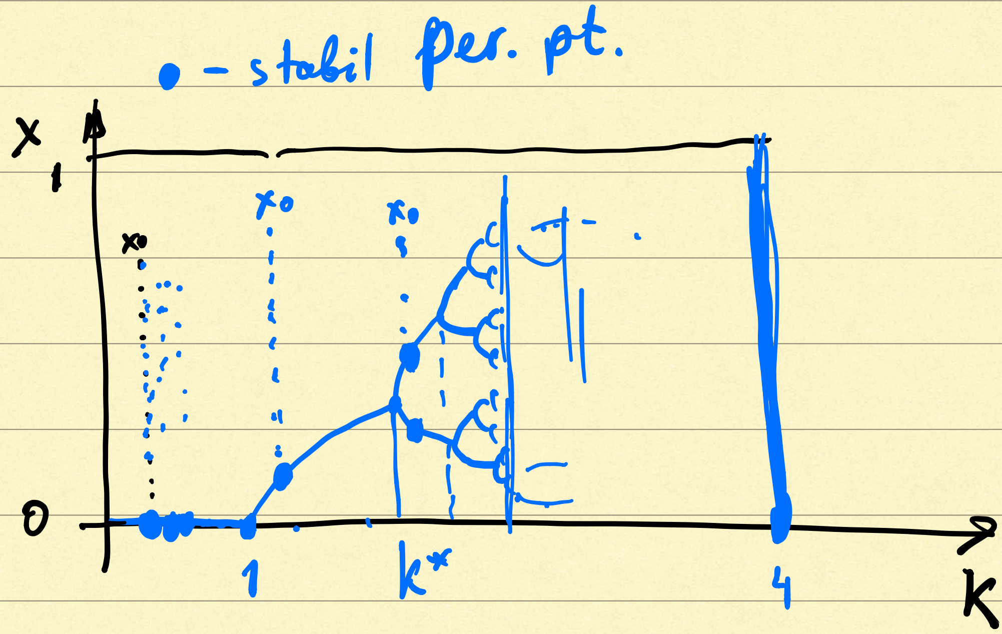


1-a raden — $f(x)$; 2-a raden — $f^2(x)$ (för samma k)

Vi ser att då k växer och passerar k^* (vid f_2), så sker en bifurkation:
den stabila fixpunkten a förlorar sin stabilitet (blir instabil) och en stabil 2-periodisk bana föds
Detta förlopp heter „<u>periodfördubblings bifurkation</u>".

På samma sätt, då k växer, förlorar även denna cykeln stabilitet och en stabil 4-cykel föds.
<u>OBS</u> instabila fixpunkter och periodiska banor också finns!

Men



Då $k = 4$
$f(x) = 4x(1-x)$
är dynamiken
<u>kaotisk</u>
på $[0, 1]$.

<u>Kaotisk dynamik</u>:

- Det finns inga <u>attraherande</u> (stabila) per. banor
- <u>Repellerande</u> (instabila) per. banor är <u>täta</u> (i varje öppen mängd finns en repel. per. pt)
- typiska banor är <u>täta</u>
- små skillnader i startvärden växer exponentiellt med antal iterationer.

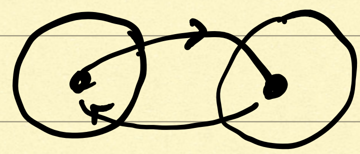
Det är viktigt att studera attraktorer för dynamiken.

Def A är en attraktor för en

avbildning $f: I \circlearrowleft$ om

- $f(A) = A$
- $\exists$ omgivning $\mathcal{O}$ av A sådan att $\forall x \in \mathcal{O}$ har vi $f^n(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} A$
- Ingen delmängd av A har dessa egenskaper

Ex En stabil fixpunkt är en attraktor
— " — 2 per. bana — " —



Ex För $k = 4$ hela $[0,1]$ är en attraktor för $f(x) = 4x(1-x)$.
Detta heter intervallattraktor

Påst. Mängden av sådana $k \in (0, 4]$ att $f(x) = kx(1-x)$ har en attraktiv cykel är tät i $(0, 4]$.

Sats (Benedicks, Carleson, KTH)

Om man väljer k "nära" 4 slumpvis

(med kontinuerlig sannolikhetsfördelning)
så finner man K med intervallattraktor
med positiv sannolikhet.