

Inlämningsuppgift 2 - tidsdiskret dynamik

Lösningarna till denna inlämningsuppgift skall skrivas på svenska.

DEL I. Fixpunkter, periodiska banor och deras stabilitet.

1. Om $f(p) = p$, sägs p vara en *fixpunkt* till f . Vi säger att en fixpunkt p till en funktion f är *attraherande* om det finns öppet intervall J , sådant att $p \in J$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ för alla $x \in J$.

Bevisa följande sats:

Sats. Antag att f har kontinuerlig derivata f' och att p är en fixpunkt till f sådan att $|f'(p)| < 1$. Då är p en attraherande fixpunkt.

2. Undersökning av familjen av *tältavbildningar* T_λ .

Låt

$$T_\lambda = \begin{cases} \lambda x & , 0 \leq x \leq 1/2 \\ \lambda(1-x), & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

- (1) Visa att T_λ avbildar intervallet $[0, 1]$ in i sig självt om $0 \leq \lambda \leq 2$;
- (2) Visa att T_λ har en attraktiv fixpunkt som attraherar alla startvärden då $0 \leq \lambda < 1$;
- (3) Beskriv dynamiken då $\lambda = 1$, dvs beskriv banorna $\{x, T_1(x), T_1^2(x), \dots\}$ för alla $x \in [0, 1]$.
- (4) Hur är det med fixpunkter och deras stabilitet då $1 < \lambda \leq 2$?
- (5) Visa att T_λ inte har några attraktiva periodiska banor då $1 < \lambda \leq 2$.

3. Undersökning av den kvadratiske familjen Q_λ

Låt $Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$.

- (1) Visa att Q_λ avbildar intervallet $[0, 1]$ in i sig självt om $0 \leq \lambda \leq 4$.
- (2) Vilka fixpunkter har Q_λ ? Hur beror deras stabilitet på λ ?
- (3) För vilka värden på λ har Q_λ en periodisk bana av längd 2? För vilka värden på λ är den stabil?
- (4) Skissera graferna till Q_λ och Q_λ^2 tillsammans med linjen $y = x$ för de olika λ -värden som anges nedan. Bestäm lokala extrempunkter för Q_λ^2 , och använd dig av resultaten från (b) och (c); med denna information är det möjligt att skissera graferna för hand. Kontrollera gärna genom att också plotta graferna med lämplig programvara.
 - (a) något λ sådant att $0 < \lambda < 1$
 - (b) något λ sådant att $1 < \lambda < 2$
 - (c) något λ sådant att $2 < \lambda < 3$
 - (d) $\lambda = 3$
 - (e) $\lambda \approx 3.1$
 - (f) $\lambda = 4$

- (5) Sammanfatta med ord hur fixpunkter och 2-cykler och deras stabilitet förändras med växande λ .
- (6) Använd valfria mjukvara/programspråk för att numeriskt visa på några av de stabila fixpunkter och 2-cykler du har funnit i den kvadratiske familjen. Genom att titta på bifurkationsdiagrammet i kompendiet *Iterationer* kan du också hitta parametervärden som ger en stabil 3-cykel, illustrera även detta.
- (7) För varje positivt heltal m så finns det (minst) ett intervall Λ_m av λ -värden så att Q_λ har en stabil cykel av längd m för $\lambda \in \Lambda_m$. Du kan läsa mer om detta i kompendiet *Iterationer*. Kan du numeriskt hitta λ -värden som ger en stabil periodisk bana av längd 5? Lättast går det om du letar efter det λ -värde som gör att den kritiska punkten $x = 1/2$ är en punkt på den periodiska banan.

DEL II Kaotisk beteende

Begreppet ”kaos” används lite oprecist om några relaterade fenomen som förekommer till exempel för vissa av de dynamiska systemen T_λ och Q_λ du har studerat ovan.

Känsligt beroende på initialvärde (Sensitive dependence on initial conditions) är en form av kaotiskt beteende som innebär att små skillnader i initialvärde snabbt växer under iteration.

4. Studera familjen T_λ för $1 < \lambda \leq 2$. Om x_0 och y_0 är två initialvärden som ligger nära varandra, dvs om $|x_0 - y_0|$ är mycket litet, och som ligger på samma sida om maximipunkten $x = 1/2$, vad kan man då säga om $|x_n - y_n|$ (där $x_n = T_\lambda^n(x_0)$ och $y_n = T_\lambda^n(y_0)$)? Försök att finna en formel som talar hur avståndet $|x_n - y_n|$ beror på n och det initialavståndet $|x_0 - y_0|$. Hur länge, dvs för vilka värden på n är formeln giltig?

5. $Q_4 = 4x(1 - x)$ är en funktion som vid iteration genererar kaotisk dynamik med känsligt beroende på initialvärden. Att verkligen bevisa det är inte så lätt som för T_λ , $\lambda > 1$. Vi nöjer oss därför med att studera detta numeriskt.

Försök med numeriska undersökningar att besvara följande fråga: Om x_0 och y_0 är två initialvärden som ligger nära varandra, dvs $|x_0 - y_0|$ är mycket litet, och ligger på samma sida om den kritiska punkten $x = 1/2$, vad kan man då säga om $|x_n - y_n|$, där $x_n = Q_\lambda^n(x_0)$ och $y_n = Q_\lambda^n(y_0)$?

Ett annat kännetecken på kaotisk dynamik är att typiska banor tenderar att sprida sig över hela intervallet efter en viss sannolikhetsfördelning.

6. Studera Q_4 : Välj ett startvärde x_0 och beräkna en lång sekvens $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ av dess bana, och gör sedan ett histogram som visar hur denna bana har fördelat sig över intervallet $[0, 1]$. Upprepa försöket med några olika värden på x_0 och jämför resultaten. Gör histogrammen med hög upplösning, dvs dela in intervallet $[0, 1]$ i så många delintervall som möjligt och gör så långa banor som möjligt.

7. I Inlämningsuppgift 1 studerade ni den logistiska modellen i kontinuerlig tid

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad y(0) = y_0,$$

där r och K är positiva konstanter.

a) Visa att den diskreta modellen $y_{n+1} = Q_\lambda(y_n) := \lambda y_n(1 - y_n)$ kan skrivas om som en differensekvation, för differensen $\Delta y_n := y_{n+1} - y_n$, på formen

$$(2) \quad \Delta y_n = R y_n \left(1 - \frac{y_n}{C}\right)$$

b) Denna differensekvation har formellt sett mycket stora likheter med den logistiska differentialekvationen (1), om man sätter $dy = \Delta y$ och $dt = \Delta t = 1$ övergår (1) till (2). Men hur är det med deras lösningar? Beskriv i ord skillnaden mellan möjliga tidsutvecklingar för lösningar till (1) respektive (2).

DEL III Rickerfamiljen

Tidsdiskreta dynamiska system används för att modellera populationsdynamik, x_n tolkas som populationens storlek vid tidpunkt n . Den kvadratiske familjen $Q_\lambda = \lambda x(1 - x)$ har egenskaper som inte är realistiska för en populationsmodell: initialvärde $x_0 = 1$ leder till utdöende i nästa steg, $x_1 = 0$, och initialvärden $x_0 > 1$ ger negativ populationsstorlek en tidsenhet senare, $x_1 < 0$. Som alternativ modell används till exempel den så kallade Ricker-familjen,

$$R_{\lambda,\beta} = \lambda x e^{-\beta x}, \lambda > 1, \beta > 0.$$

8. Bekanta dig med Rickermodellen:

- (1) Skissera grafen till $R_{\lambda,\beta}$ och pröva att iterera grafiskt.
- (2) Visa att för små värden på x_n , dvs $0 < x_n \ll 1$ gäller att $x_{n+1} = R_{\lambda,\beta}(x_n) \approx \lambda x_n$. Vad blir den biologiska tolkningen av λ ?
- (3) Hur tolkar man faktorn $e^{-\beta x}$ biologiskt? Vad spelar parametern β för roll?

9. β är en skalningsparameter som kan elimineras med ett koordinatbyte: Visa att $x_{n+1} = \lambda x_n e^{-\beta x_n}$ övergår i $u_{n+1} = \lambda u_n e^{-u_n}$ efter variabelbytet $u = \beta x$.

Vi kan därför nöja oss med att studera Rickerfamiljen för $\beta = 1$,

$$R_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda,1} = \lambda x e^{-x}.$$

10. Bestäm fixpunkter och deras stabilitet för R_λ .

11. Precis som för den kvadratiske familjen gäller att till varje parametervärde λ finns en unik attraktor Ω_λ som attraherar "nästan alla" startvärden x_0 under iteration med R_λ . Plotta det så kallade *bifurkationsdiagrammet* som visar hur Ω_λ beror på λ .

12. För små x gäller som vi såg ovan att $R_\lambda(x) \approx \lambda x$. Visa att en bättre approximation för små x ges av $R_\lambda(x) \approx Q_\lambda(x)$.

13. Antag att vi har en djurpopulation i en viss isolerad miljö, och att populationsdynamiken beskrivs av Rickermodellen R_λ . Tänk dig att isolationen bryts och djurpopulationen får ett tillskott genom immigration med fixerat antal djur per tidsenhet. Modifiera Rickermodellen för att beskriva denna nya situation. Hur påverkas den positiva fixpunktens stabilitet? Diskutera olika scenarier.