Matematik för kemister Fö 1

Masha, Marie Saprykina.

Ex,

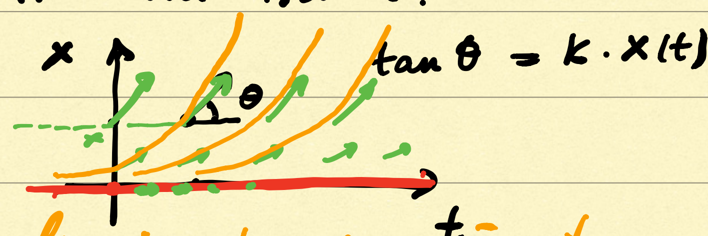
antal. i takt

kaniner växer proportionelt med antalet.

Låt $x(t)$ = # kaniner vid tid t.

$\dot{x}(t) = k\,x(t)$

1) riktningsfält



Varje lösningskurva är tangent till vektorfältet i varje punkt.

Riktningsfält kan skissas mha Maple

2) Löser ekvationen $\frac{dx}{dt} = k\,x(t)$, $k > 0$

Ekv. är separabel. För $x \neq 0$ har vi

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt \iff \ln|x| = kt + C_1 \iff$$

$$e^{\ln|x|} = e^{kt + C_1} = e^{kt} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C_2 > 0} = C_2 e^{kt}$$

$|x| = \underbrace{C_2}_{>0} e^{kt}$, C_2 är en valfri positiv konst.

(1) $x = C_3 e^{kt}$, $C_3 \neq 0$ är godtycklig.

Fall $x = 0$. OBS: $x(t) = 0 \ \forall t$ är en lösning

Denna kan inkluderas i familjen (1):

$\boxed{x(t) = Ce^{kt} \text{ där } C \in \mathbb{R} \text{ är godtycklig.}}$

beskriver alla lösningar till systemet ovan

(detta är den allmänna lösningen)

OBS: $\frac{dx}{dt} = kx \iff \int \frac{dx}{x} = k \int dt$

$\iff x = Ce^{kt}, \; C \in \mathbb{R}$.

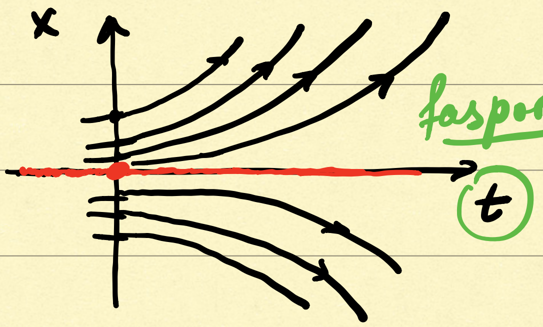
fel

---

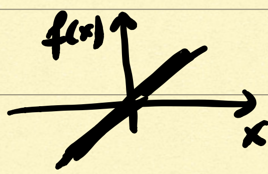
3) Ekvationen $\dot{x} = \underbrace{kx}_{f(x)}$ är autonom d.v.s.

f beror inte explicit på t.

Kritiska punkter: $f(x) = 0$. De motsvarar stationära lösningar. I vårt fall, $x = 0$ är en krit. pt., $x(t) = 0 \;\forall t$ är en stationär lösning.



x		0	
$x(t)$	↘		↗
$f(x) = \dot{x}(t)$	$-$	0	$+$



$(k > 0)$

Här är krit. pt (station. lösn) instabil

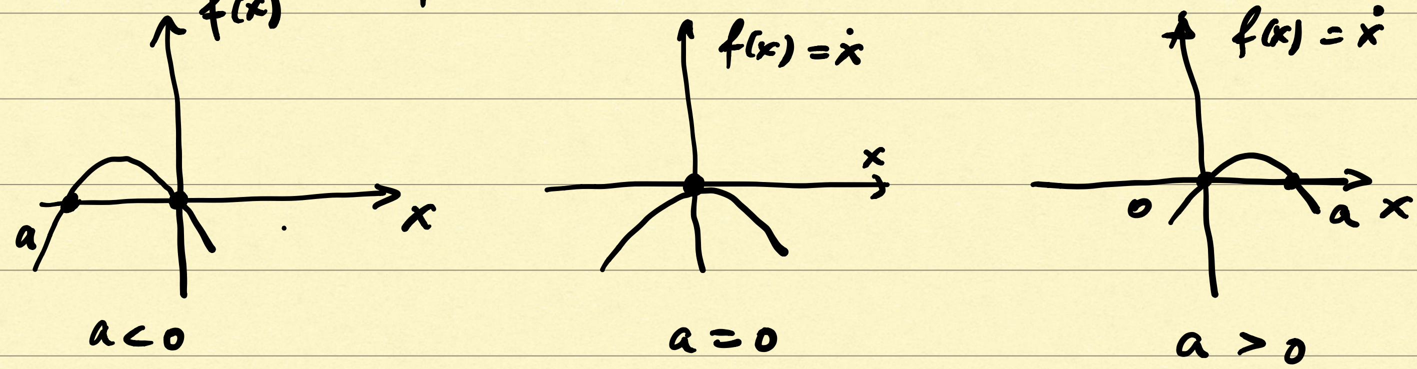
faslinje

Bifurkationer

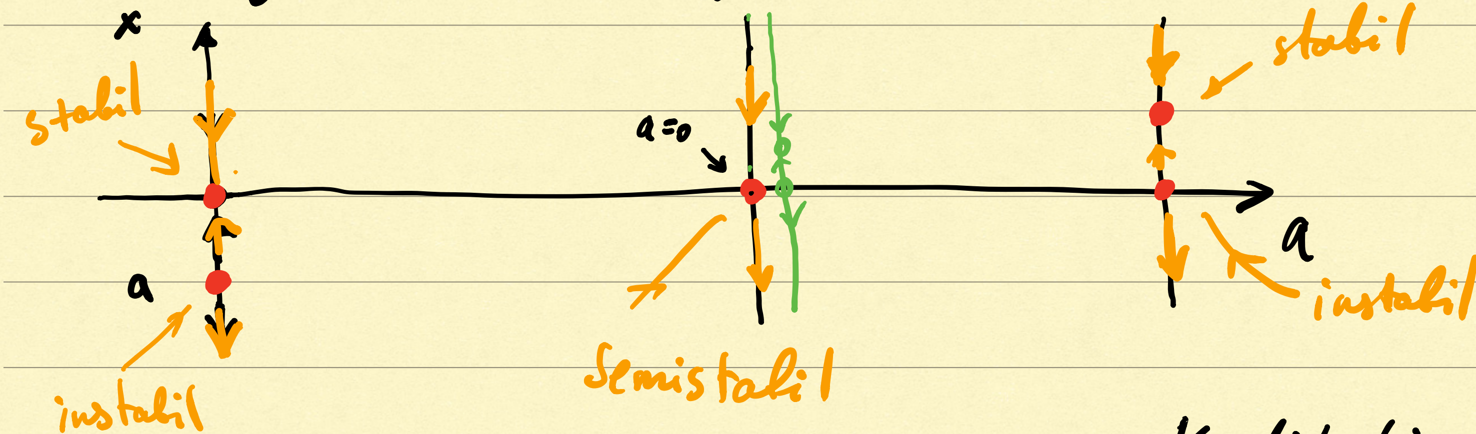
Ex. Betrakta en familj av diff. ekv.

$\dot{x} = x(a - x)$ där $a \in (-1, 1)$

$f(x)$ parameter.



faslinje (beroende på a)



Vid $a = 0$ sker en <u>bifurkation</u> (Kvalitativ förändring av fasporträttet).

Just denna bifurkation kallas för <u>sadel-nod</u> bifurk.

Ni kommer att se Hopf bifurkation.

<u>OBS</u> • om $a = a_0 < 0$, så för alla a "nära" a_0 har fasporträttet samma karaktär.

* Sådana system är <u>strukturelt stabila</u> $\dot{x} = x(3-x)$

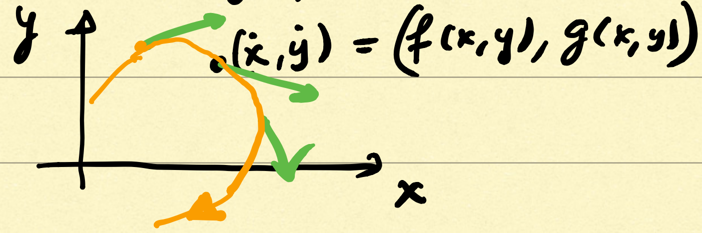
• om $a = 0$. För alla a hur nära 0 som helst är fasporträttet skild från den för $a \neq 0$. <u>Strukt. instabil.</u>

$\dot{x} = -x^2$

Autonoma system av ODE.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Riktningsfält



Kritiska punkter : $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

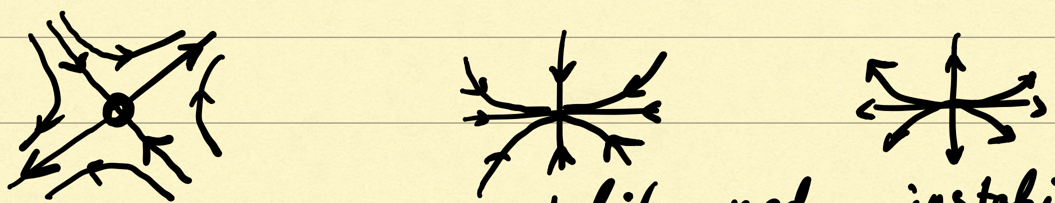
dessa motsvarar stationära lösningar.

De enklaste system är linjära

$\dot{X} = AX$. $\vec{0}$ är alltid en krit. pt.

Låt λ_1, λ_2 vara egenvärden av A.

Läs i boken om DE

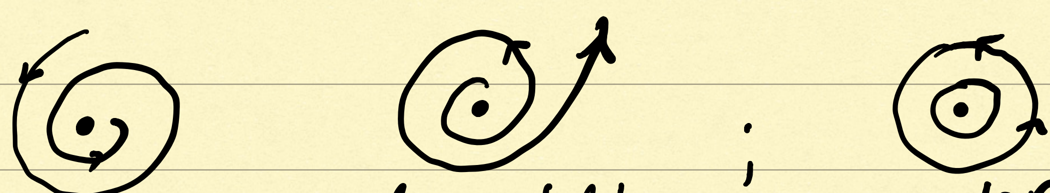


sadel ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$)

stabil ← nod → instabil

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\qquad$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

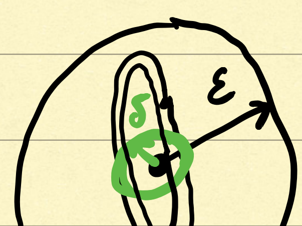
Reella λ_1, λ_2



stabil → spiral ← instabil ; center

λ_1, λ_2 komplexa (ej reella).

Def En kritisk punkt p är **stabil** om $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ s. att $\forall$ lösning $x(t)$ sådan att $|x(0) - p| < \delta$ gäller



$|x(t) - p| < \varepsilon \quad \forall\, t > 0$

Om dessutom $x(t) \to p$ då $t \to \infty$
så är p asymptotiskt stabil.

asympt. stabil

stabil, ej asympt. stabil

Påstående Antag att ett system

$$S = \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

har en asympt. stabil (eller instabil) krit. pt p.

Låt $\tilde{S}$ vara ett "nära" system, dvs

$$\tilde{S} = \begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x,y) \\ \dot{y} = \tilde{g}(x,y) \end{cases}$$

$|f - \tilde{f}|$ och $|g - \tilde{g}|$ är "små"

Då har $\tilde{S}$ en krit. pt $\tilde{p}$ "nära" p av samma typ som p.

OBS Påståendet säger ingenting om center.

Ex. – se min konspekt på nätet!

Icke-linjära system — " —.